ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

HOÀNG VĂN THI

ÁNH XẠ CHỈNH HÌNH CHUẨN TẮC VÀ MỘT SỐ ĐỊNH LÝ CỔ ĐIỂN CỦA LÝ THUYẾT HÀM

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

HOÀNG VĂN THI

ÁNH XẠ CHỈNH HÌNH CHUẨN TẮC VÀ MỘT SỐ ĐỊNH LÝ CỔ ĐIỂN CỦA LÝ THUYẾT HÀM

Chuyên ngành: TOÁN GIẢI TÍCH
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS. PHẠM VIỆT ĐỨC

THÁI NGUYÊN - 2015

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các tài liệu trong luận văn là trung thực. Luận văn chưa từng được công bố trong bất cứ công trình nào.

Tác giả

Hoàng Văn Thi

LỜI CẢM ƠN

Luận văn được thực hiện và hoàn thành tại khoa Toán, trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy giáo **PGS.TS. PHẠM VIỆT ĐỨC**, người hướng dẫn khoa học, người đã gợi ý đề tài, định hướng nghiên cứu và tận tình hướng dẫn tác giả trong suốt quá trình nghiên cứu thực hiện luận văn.

Tác giả xin gửi lời cảm ơn sâu sắc tới các thầy cô giáo công tác tại Viện Toán học Việt Nam; khoa Toán, Phòng Đào tạo (Bộ phận quản lý Sau đại học) Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, các thầy cô đã tạo mọi điều kiện trang bị cho tác giả về kiến thức, về học liệu và kinh nghiệm nghiên cứu cũng như mọi thủ tục hành chính để tác giả hoàn thành bản luận văn này.

Tác giả cũng gửi lời cảm ơn chân thành đến gia đình, các bạn bè, đồng nghiệp đã luôn động viên, giúp đỡ tác giả trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu hoàn thành luận văn.

Do thời gian nghiên cứu và năng lực bản thân còn nhiều hạn chế, bản luận văn không tránh khỏi những thiếu sót. Tác giả rất mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu, sự chỉ bảo tận tình của các thầy cô và bạn bè đồng nghiệp.

Thái Nguyên, tháng 04 năm 2015

Tác giả

Hoàng Văn Thi

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

Lý thuyết về không gian phức hyperbolic đã được đưa ra bởi S.Kobayashi vào những năm 1966 - 1970 và có ảnh hưởng không nhỏ đến việc nghiên cứu và phát triển của ngành giải tích phức. Không những vậy, rất nhiều nhà toán học quan tâm và đã có những thành tựu đáng kể như Kiernan, Kwack, Joseph và Noguchi. Cộng thêm việc Montel đưa ra khái niệm họ chuẩn tắc các ánh xạ chỉnh hình đã làm cho giải tích phức hyperbolic có mối liên hệ mật thiết với lý thuyết họ ánh xạ chuẩn tắc. Những đặc trưng của tính nhúng hyperbolic của các không gian phức có thể được nghiên cứu từ cách nhìn của ánh xạ chỉnh hình chuẩn tắc, tổng quát hóa một số định lý và mở ra những hướng đi mới trong ngành giải tích phức cũng như trong ngành toán học hiện đại.

Trong luận văn này, chúng tôi trình bày chi tiết kết quả của Ken-Ichi Funahashi năm 1984 về ánh xạ chỉnh hình chuẩn tắc trong các không gian phức trong mối liên hệ với lý thuyết các đa tạp hyperbolic và lý thuyết Nevanlinna.

Luận văn gồm có hai chương. Chương 1, chúng tôi trình bày những vấn đề cơ bản về giải tích hyperbolic và lý thuyết Nevanlinna. Chương 2 là nội dung chính của luận văn. Trong chương này chúng tôi trình bày một số kết quả về các ánh xạ chỉnh hình chuẩn tắc và các mở rộng một số định lý cổ điển của lý thuyết hàm như định lý Picard lớn và định lý Lindelöf.

Chương 1
MỘT SỐ KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1. Đa tạp phức

1.1.1. Định nghĩa

Cho X là một không gian tôpô Hausdorff

(1) Cặp (U,φ) được gọi là một bản đồ địa phương của X trong đó U là một tập mở trong X, $\varphi : U \to \mathbb{C}^n$ nếu các điều kiện sau thỏa mãn

(i) $\varphi(U)$ là một tập mở trong $\mathbb{C}^n$.

(ii) $\varphi : U \to \varphi(U)$ là một đồng phôi.

(2) Họ $A = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ các bản đồ địa phương của X được gọi là một tập bản đồ giải tích (atlas giải tích) của X nếu các điều kiện sau thỏa mãn :

(i) $\{U_i\}_{i \in I}$ là một phủ mở của X.

(ii) Với mọi U_i, U_j mà $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ thì ánh xạ

$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$ là ánh xạ chỉnh hình.

Xét họ các atlas giải tích trên X. Hai atlas giải tích được gọi là tương đương nếu hợp của chúng là một atlas giải tích. Đây là quan hệ tương đương trên tập các atlas giải tích. Mỗi lớp tương đương xác định một cấu trúc khả vi phức trên X, và X với cấu trúc khả vi phức trên nó được gọi là một đa tạp phức n chiều.

1.1.2. Ví dụ

D là miền trong $\mathbb{C}^n$, khi đó D là một đa tạp phức n chiều với bản đồ địa phương $\{(D, Id_D)\}$.

1.1.3. Ánh xạ chỉnh hình giữa các đa tạp phức

(1) Cho M, N là hai đa tạp phức. Ánh xạ liên tục $f: M \to N$ gọi là chỉnh hình trên M nếu với mọi bản đồ địa phương (U, φ) của M và bản đồ địa phương (V, ψ) của N sao cho $f(U) \subset V$ thì ánh xạ

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V) \text{ là chỉnh hình.}$$

Ta kí hiệu $H(M, N)$ là tập các ánh xạ chỉnh hình từ đa tạp phức M đến đa tạp phức N.

(2) Cho M, N là hai đa tạp phức và $f: M \to N$ là một song ánh. Nếu f, f^{-1} là các ánh xạ chỉnh hình thì f được gọi là song chỉnh hình giữa M và N.

1.1.4. Định nghĩa

(1) Cho M là đa tạp phức, một không gian phức đóng X là một tập con đóng của M mà về mặt địa phương được xác định bởi hữu hạn các phương trình giải tích. Tức là, với $x_0 \in X$ tồn tại một lân cận mở V của x_0 trong M và hữu hạn các hàm chỉnh hình $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ trên V sao cho $X \cap V = \{x \in V \mid \varphi_i(x) = 0, i = 1, \ldots, m\}$.

(2) Cho M là đa tạp phức, không gian con phức đóng A của M được gọi là một divisor trên M nếu về mặt địa phương tại mỗi điểm có thể xác định bởi một phương trình giải tích, tức là tại mỗi điểm có lân cận V của x trong M sao cho $A \cap V$ được xác định bởi phương trình $\varphi = 0$, với φ là một hàm chỉnh hình nào đó trên V.

1.2. Giả khoảng cách Kobayashi trên không gian phức

1.2.1. Khoảng cách Bergman - Poincare trên đĩa đơn vị

Giả sử $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ là đĩa đơn vị mở trong $\mathbb{C}$.

Xét ánh xạ $\rho_D : D \times D \to \mathbb{R}^+$ xác định bởi:

$$\rho_D(a,b) = \ln\frac{1+\left|\dfrac{a-b}{1-\bar{b}a}\right|}{1-\left|\dfrac{a-b}{1-\bar{b}a}\right|};\ \forall a,b \in D.$$

Ta có ρ_D là một khoảng cách trên D và gọi đó là khoảng cách Bergman - Poincare trên đĩa đơn vị.

1.2.2. Giả khoảng cách Kobayashi trên không gian phức

1.2.2.1. Định nghĩa

Giả sử X là một không gian phức, x và y là hai điểm tùy ý của X. $H(D,X)$ là tập tất cả các ánh xạ chỉnh hình từ đĩa đơn vị D vào không gian phức X được trang bị tôpô compact mở.

Xét dãy các điểm $p_0 = x, p_1, ..., p_k = y$ của X, dãy các điểm $a_1, a_2, ..., a_k$ của D và dãy các ánh xạ $f_1, f_2, ..., f_k$ trong $H(D,X)$ thỏa mãn

$$f_i(0) = p_{i-1},\ f_i(a_i) = p_i,\ \forall i = 1,2,...,k.$$

Ta gọi một dây chuyền chỉnh hình γ nối x với y là tập hợp :

$\gamma = \{p_0, ..., p_k, a_1, ..., a_k, f_1, ..., f_k\}$ thỏa mãn các điều kiện trên.

Ta đặt $L_\gamma = \sum_{i=1}^{k} \rho_D(0,a_i)$ và định nghĩa $d_X(x,y) = \inf L_\gamma$ trong đó infimum lấy theo tất cả các dây chuyền chỉnh hình γ nối x với y.

Dễ thấy d_X thỏa mãn các tiên đề về giả khoảng cách, tức là:

i) $d_X(x,y) \geq 0,\ \forall x,y \in X.$

ii) $d_X(x,y) = d_X(y,x),\ \forall x,y \in X.$

iii) $d_X(x,z) \leq d_X(x,y) + d_X(y,z),\ \forall x,y,z \in X.$

Nói cách khác d_X là một giả khoảng cách trên X. Giả khoảng cách d_X được gọi là giả khoảng cách Kobayashi trên không gian phức X.

1.2.2.2. Tính chất

Ta dễ dàng chứng minh các tính chất sau của d_X:

i) $d_D = \rho_D$ và $d_{D^n}((z_i),(w_j)) = \max\limits_{j=\overline{1,n}} \rho(z_i, w_j)$ với mọi $(z_i),(w_j) \in D^n$.

ii) Nếu $f: X \to Y$ là ánh xạ chỉnh hình giữa các không gian phức X và Y thì $d_X(p,q) \geq d_Y(f(p), f(q)),\ \forall p,q \in X$.

Từ đó suy ra rằng nếu $f: X \to Y$ là song chỉnh hình thì:

$$d_X(p,q) = d_Y(f(p), f(q)),\ \forall p,q \in X.$$

iii) Đối với một không gian phức X tùy ý , hàm khoảng cách d_X là liên tục trên $X \times X$.

iv) Nếu X và Y là các không gian phức thì với mọi $x_1, x_2 \in X$ và $y_1, y_2 \in Y$ thì ta có:

$$\max\{d_X(x_1,x_2), d_Y(y_1,y_2)\} = d_{X \times Y}((x_1,y_1),(x_2,y_2)).$$

1.3. Metric vi phân Kobayashi

Giả sử M là đa tạp phức. Khi đó ta định nghĩa K_M là vi phân Kobayashi trên M được xác định bởi :

$K_M(p,v) = \inf\{r > 0 : \varphi(0) = p, d\varphi(0, re) = v, \varphi \in H(D,M)\}$ trong đó $p \in M, v \in T_pM$; $d\varphi$ là ánh xạ tiếp xúc của φ và e là véc tơ đơn vị tại $0 \in D$.

1.4. Không gian phức Hyperbolic

1.4.1. Định nghĩa