ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

LÂM QUANG TÀI

TÍNH DUY NHẤT CỦA HÀM ĐA ĐIỀU HÒA DƯỚI

Chuyên ngành: Giải tích
Mã số: : 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: GS-TSKH NGUYỄN QUANG DIỆU

Thái Nguyên, năm 2015

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan rằng nội dung trình bày trong luân văn này là trung thực và không trùng lặp với các đề tài khác đã công bố ở Việt Nam. Tôi cũng xin cam đoan rằng mọi sự giúp đỡ cho việc thực hiện luận văn này đã được cảm ơn và các thông tin trích dẫn trong luận văn đã được chỉ rõ nguồn gốc.

Thái Nguyên, tháng 10 năm 2015

Tác giả

Lâm Quang Tài

Xác nhận

của trưởng khoa chuyên môn

Xác nhận

của người hướng dẫn khoa học

GS. TSKH. Nguyễn Quang Diệu

LỜI CẢM ƠN

Đầu tiên tôi xin chân thành bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới GS-TSKH Nguyễn Quang Diệu người thầy đã tận tình giúp đỡ, động viên tôi trong suốt quá trình hoàn thành luận văn.

Tôi xin chân thành cảm ơn các thầy cô giáo trong bộ môn Giải Tích trường ĐHSP Thái Nguyên đã truyền thụ những kiến thức quan trọng cho tôi, tạo điều kiện thuận lợi, cho tôi những ý kiến đóng góp quý báu giúp đỡ tôi nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Tôi xin chân thành cảm ơn ĐHSP Thái Nguyên khoa toán - tin nơi mà tôi đã được đào tạo và hoàn thành luận văn thạc sỹ.

Tôi xin chân thành cảm ơn gia đình, bạn bè những người luôn ủng hộ tôi trong suốt quá chình hoàn thành luận văn.

Thái Nguyên tháng 10 năm 2015

Tác giả

Lâm Quang Tài

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Tính duy nhất của một hàm nào đó có vai trò quan trọng trong toán học.

Ở phổ thông ta thường gặp bài toán giải phương trình, việc tìm ra lời giải không hề dễ dàng nhưng bằng những cách thông thường ta lại tìm được một nghiệm của nó. Công việc của chúng ta là chứng minh hàm số đó có nghiệm duy nhất trên miền xác định.

Tương tự trong giải tích hàm ta có: Giả sử dãy hàm $f_1(x)$, $f_2(x)$ ..., $f_n(x)$ xác định trên miền D thỏa mãn $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \mathrm{f(x)}$ thì ta có $\mathrm{f(x)}$ là duy nhất.

Tính duy nhất của một hàm được các nhà toán học rất quan tâm, đặc biệt trong giải tích phức. Trong lớp các dãy hàm chỉnh hình chúng ta đã biết Định lí sự tồn tại duy nhất của hàm chỉnh hình. Cụ thể: Giả sử cho $f(z)$, $g(z)$ là các hàm chỉnh hình trong miền Ω mở trong $\mathbb{C}^n$. Nếu $f(z_n) = g(z_n)$ trên một dãy điểm khác nhau $z_n \in \Omega$ mà hội tụ tới một điểm $a \in \Omega$ thì $f(z) = g(z)$ với mọi $z \in \Omega$.

Thế còn lớp hàm đa điều hòa dưới xác định trên miền Ω mở trong $\mathbb{C}^n$ thì sao? Chúng có là duy nhất hay không, nếu không duy nhất thì chúng phải thỏa mãn điều kiện gì để trở thành duy nhất?

2. Mục đích nghiên cứu

Mục đích của đề tài này là trình bày một số kết quả gần đây của Nguyễn Quang Diệu về tính duy nhất của hàm đa điều hòa dưới trên tập mở Ω trong $\mathbb{C}^n$ nhằm làm sáng tỏ vấn đề trên.

3. Nhiệm vụ nghiên cứu

Cho Ω là miền siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$. Cho $K \subset \Omega$ là tập compact lồi chỉnh hình trong Ω. Cho $u_1, u_2 \in PSH^-(\Omega)$, u_1, u_2 phải thỏa mãn các điều kiện gì để chúng bằng nhau trên Ω. Đây là nhiệm vụ hàng đầu mà ta cần giải quyết.

4. **Đối tượng và phạm vi nghiên cứu**

Ta nghiên cứu trên tập các hàm đa điều hòa dưới, âm trên tập mở Ω là miền siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$.

5. **Nội dụng của luận văn**

Nội dung chính của luận văn là trình bày một số kết quả gần đây của Nguyễn Quang Diệu về tính duy nhất của hàm đa điều hòa dưới trên tập mở Ω trong $\mathbb{C}^n$.

Chương I. Trình bày các kiến thức cơ sở như hàm nửa liên tục, đa điều hòa dưới, toán tử Monge-Ampère ... làm cơ sở lí thuyết cho chương sau.

Chương II. Phát biểu và chứng minh chi tiết bài toán về "tính duy nhất của hàm đa điều hòa dưới".

6. **Phương pháp nghiên cứu**

Phương pháp nghiên cứu là dựa vào tính chất của toán tử Monge-Ampère cùng với đặc trưng hình học của tập lồi phân hình và lồi chỉnh hình làm công cụ để chứng minh tính duy nhất của hàm đa điều hòa dưới, âm thỏa mãn một số điều kiện cho trước trên tập mở Ω trong $\mathbb{C}^n$.

Chương 1
KIẾN THỨC CƠ BẢN

1.1. Phân bố

Định nghĩa. Giả sử $U \subset \mathbb{R}^n$ là tập mở. Một phân bố trên U là dạng tuyến tính liên tục trên $D(U)$, với $D(U)$ là các hàm khả vi vô hạn trên U. Ta kí hiệu các phân bố trên U là $D'(U)$.

Ví dụ : Giả sử $U \subset \mathbb{R}^n$ là tập mở và $f \in C(U)$ khi đó f xác định một phân bố $u_f \in D'(U)$ cho bởi

$$u_f(\varphi) = \int_U f\varphi dV,\ \varphi \in D(U).$$

Thật vậy, rõ ràng u_f là dạng tuyến tính trên $D(U)$. Giả sử K Đ U. Chọn $k = 0$, ., do f liên tục trên U. Khi đó với mọi $\varphi \in D(U)$, sup $p\varphi \subset K$, ta có:

$$\left|u_f(\varphi)\right| \le c\|\varphi\|_K.$$

Vậy $u_f(\varphi)$ là một phân bốtrên U.

1.2. Dạng vi phân

Giả sử $\mathbb{R}^n$ là không gian vector n-chiều với cơ sở chính tắc e_j = (0,…,1,0,…,0), ở đó 1 ở vị trí thứ j. Giả sử với mỗi 1≤ j ≤ n kí hiệu u_j là hàm tọa độ thứ j :

$$u_j(x) = x_j.$$

Một ánh xạ

$$f : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}_{p} \to \mathbb{R}$$

gọi là p - tuyến tính nếu nó tuyến tính theo từng biến khi các biến khác cố định. Một ánh xạ p - tuyến tính sao cho $f(v_1,\ldots,v_p) = 0$ mỗi khi $v_j = v_{j+1}$, 1≤ j < p gọi là p - tuyến tính thay dấu. Tập các p - tuyến tính thay dấu từ

$$\underbrace{\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}_{p} \to \mathbb{R}$$

kí hiệu là $\Lambda^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Bằng cách thay mỗi $v_j = \sum_{k=1}^{n} u_k(v_j)e_k$, ta có thể biểu diễn mỗi ánh xạ p - tuyến tính thay dấu bằng công thức

$$f(v_1, v_2, ..., v_p) = \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_p \le n}{}' f_j(u_{j_1} \wedge \cdots \wedge u_{j_p})(v_1, \cdots, v_p)$$

ở đó:

$$(u_{j_1} \wedge \cdots \wedge u_{j_p})(v_1, \cdots, v_p) = \det\left[u_{j_k}(v_j)\right] \text{và } f_J \in \mathbb{R}.$$

Định nghĩa : Giả sử $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là tập mở. Một p - dạng vi phân trên **Ω** là một ánh xạ

$$\alpha : \Omega \to \Lambda^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}).$$

Nếu đặt $dx_k(x) = u_k$, 1 ≤ k ≤ n, $x \in \Omega$ thì từ lí luận trên ta có thể viết mỗi p - dạng vi phân α trên Ω dưới dạng :

$$\alpha(x) = \sum_I{}' \alpha_I(x) dx_I$$

ở đó

$$I = (i_1, \cdots, i_p),\ 1 \le i_1 \le \cdots < i_p \le n$$

$$dx_I = dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$$

$\alpha_I(x)$ là các hàm trên Ω. Tùy thuộc vào các hàm $\alpha_I(x)$ là các hàm bị chặn, liên tục khả vi lớp nào hay trơn… ta nói $\alpha_I(x)$ là dạng bị chặn, liên tục khả vi lớp nào hay trơn…

1.3. Dòng

1.3.1. Định nghĩa

Một dòng bậc p hay có chiều (n-p) trên tập mở $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là dạng tuyến tính liên tục $T : D^{(n-p)}(\Omega) \to \mathbb{C}$, với $D^{(n-p)}(\Omega)$ là không gian các (n- p) - dạng trơn có giá compact trong Ω.

Nếu α là dạng trong $D^{(n-p)}(\Omega)$, giá trị của T tại α, kí hiệu $T(\alpha)$ hay $\langle T,\alpha\rangle$.

Thông thường các dòng thường được xét với tôpô yếu. Như vậy với tôpô này, một dãy T_n các dòng bậc p trên Ω gọi là hội tụ tới dòng T bậc p trên Ω nếu dãy T_n hội tụ tới T trong không gian $(D^{(n-p)}(\Omega))'$,

nghĩa là với mọi

$$a \in D^{(n-p)}(\Omega),\ \langle T_n,\alpha\rangle \to \langle T,\alpha\rangle .$$

Giả sử T bậc p trên $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\mathrm{T} \in (D^{(n-p)}(\Omega))'$. Giả sử $I=(i_1,...,i_p)$ là dãy tăng với $1 \le i_1 < ... < i_p \le n$. Giả sử $J=(j_1,...,j_{n-p})$ là dãy tăng các chỉ số là phần bù của I trong tâp $1,2,...,\mathrm{n}$. Khi đó $\varphi \in D(U)$ xác định

$$T_{I(\varphi)} = \varepsilon_{I,J} T(\varphi dx_J)$$

ở đó $\varepsilon_{I,J}$ được chọn sao cho

$$\varepsilon_{I,J} dx_I \wedge dx_J = dV = dx_1 \wedge ... \wedge dx_n$$

là dạng thể tích trong $\mathbb{R}^n$. Từ $\mathrm{T} \in (D^{(n-p)}(\Omega))'$ nên $\mathrm{T}_I \in (D(\Omega))'$, nghĩa là các phân bố trên Ω.

Do đó dòng T bậc p có thể viết

$$T = \sum_I {}' T_I dx_I$$

và như thế mọi dòng bậc p trên Ω có thể xem như $p-$ dạng vi phân với hệ số là phân bố. Nếu coi $D^n(\Omega) = D(\Omega)$ thì dòng bậc 0 trên Ω có thể viết:

$$T = u dx_1 \wedge ... \wedge dx_n$$

với u là một phân bố trên Ω. Lúc đó ta cần thống nhất T với u có thể nói rằng các dòng bậc p trên Ω là một phân bố trên Ω và ngược lại.

Dòng T bậc p trên Ω gọi là cấp 0 nếu nó thác triển tới dạng tuyến tính liên tục trên không gian $D_0^{(n-p)}(\Omega)$ các $(n-p)-$ dạng với hệ số là các hàm liên tục có giá compact trong Ω. Trong trường hợp này nếu

$$T = \sum_I{}' T_I dx_I$$

thì T_I là các dạng tuyến tính liên tục trên $C_0(\Omega)$ với giá trị trong $\mathbb{C}$, do đó T_I là độ đo Borel chính quy phức trên Ω.

Ví dụ : Giả sử $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là tập mở và $E \subset \Omega$ là tập Borel. Khi đó E xác định một dòng bậc 0, kí hiệu E, trên Ω cho bởi

$$\left\langle E, \alpha \right\rangle = \int_E \alpha, \ \alpha \in D^n(\Omega).$$

Dòng E được gọi là dòng tích phân trên Ω.

Khi xét các dạng vi phân cũng như các dòng trên tập mở trong $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ ta sẽ phát biểu các khái niệm này theo tọa độ phức $z = (z_1, z_2, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. Bằng cách thay

$$dx_j = \frac{1}{2}(dz_j + d\bar{z}_j)$$

và

$$dy_j = \frac{1}{2i}(dz_j - d\bar{z}_j)$$

và do đó sẽ xuất hiện các khái niệm dạng phức song bậc (p, q) cũng như các dòng song bậc (p, q).

1.3.2. Dòng song bậc

Định nghĩa. Mỗi phần tử $T \in (D^{(n-p.n-q)}(\Omega))'$ gọi là một dòng song bậc (p,q) hay $(p,q)-$dòng (tương ứng với song chiều $(n-p, n-q)$). Những phần tử của $(D_0^{(n-p.n-q)}(\Omega))'$ gọi là dòng cấp 0, song bậc (hay $(p,q)-$dòng cấp 0).