ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐÀO THỊ DIỆU THÚY

MỘT SỐ ĐA THỨC CÓ DẠNG ĐẶC BIỆT

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐÀO THỊ DIỆU THÚY

MỘT SỐ ĐA THỨC CÓ DẠNG ĐẶC BIỆT

Chuyên ngành: **Phương pháp Toán sơ cấp**
Mã số: **60 46 01 13**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. NGUYỄN VĂN HOÀNG

Thái Nguyên - 2016

Mục lục

Danh sách các kí hiệu

Kí hiệu	**Tên**
$(C_n^k)_q$	Hệ số $q-$nhị thức
$T_n(x)$	Đa thức Chebyshev
$F(x,z)$	Hàm sinh của dãy $(a_n(x))$
$\langle -, - \rangle$	Tích vô hướng

Lời mở đầu

Chúng ta biết rằng lí thuyết đa thức xuất hiện và được nghiên cứu trong nhiều lĩnh vực của toán học và khoa học. Trong đó một số lớp đa thức có dạng đặc biệt được nghiên cứu rộng rãi, chẳng hạn lớp các đa thức đối xứng, tức là chúng bất biến khi ta hoán vị các biến độc lập; lớp các đa thức giá trị nguyên - tức là khi ta thay bất kì một số nguyên vào đa thức ta nhận được giá trị của đa thức là một số nguyên; và một số lớp đa thức khác như đa thức Chebyshev.

Với mong muốn tìm hiểu một số lớp đa thức có dạng đặc biệt, đồng thời nâng cao kiến thức đã học trong chương trình đại học và cao học, tôi chọn đề tài ***Một số đa thức có dạng đặc biệt*** làm luận văn cao học của mình.

Cấu trúc luận văn được chia thành 03 chương:

Chương 1 trình bày một vài kiến thức cơ bản về đa thức và vành đa thức, bậc của đa thức, đa thức bất khả quy và cách phân tích đa thức thành các thừa số bất khả quy. Mục cuối chương chúng tôi trình bày về định nghĩa và một vài tính chất của lớp các đa thức đối xứng.

Chương 2 trình bày lớp đa thức giá trị nguyên, trước tiên, mục đầu chương chúng tôi trình bày các đa thức giá trị nguyên một biến. Mục tiếp theo trình bày về đa thức giá trị nguyên nhiều biến, mục cuối chương trình bày về dạng q-đồng dạng của đa thức giá trị nguyên.

Chương 3 trình bày lớp đa thức Chebyshev, phần đầu chương chúng tôi trình bày khái niệm và tính chất cơ bản của đa thức Chebyshev. Các mục tiếp theo trình bày về đa thức trực giao và bất đẳng thức cho đa thức Chebyshev, mục cuối chương trình bày về hàm sinh.

Luận văn được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn của TS. Nguyễn Văn Hoàng. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới TS. Nguyễn Văn Hoàng, thầy đã định hướng chọn đề tài và tận tình hướng dẫn, giảng giải để tôi có thể hoàn thành luận văn này.

Qua đây tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới phòng các thầy cô giáo dạy cao học chuyên ngành Phương pháp toán sơ cấp, trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã trang bị kiến thức, giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn.

Tôi cũng xin gửi lời cảm ơn sâu sắc tới Trung tâm Dạy nghề và Giáo dục thường xuyên huyện Yên Bình tỉnh Yên Bái đã giúp đỡ, tạo mọi điều kiện thuận lợi giúp tôi có thể hoàn thành luận văn này.

Nhân dịp này tôi cũng xin được gửi lời cảm ơn chân thành tới gia đình, bạn bè đã luôn động viên, cổ vũ, giúp đỡ tôi trong quá trình học tập và hoàn thành luận văn.

Thái Nguyên, tháng 9 năm 2016

Tác giả

Đào Thị Diệu Thúy

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này chúng tôi trình bày một vài kiến thức cơ bản về đa thức và vành đa thức, bậc của đa thức, đa thức bất khả quy và cách phân tích đa thức thành các thừa số bất khả quy. Mục cuối chương chúng tôi trình bày về định nghĩa và một vài tính chất của lớp các đa thức đối xứng. Các kết quả của chương này chủ yếu được tham khảo từ các tài liệu [1, 2].

1.1 Đa thức và vành đa thức

Cho A là vành giao hoán đơn vị 1 và P là tập các dãy $(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ trong đó $a_i \in A$ với mọi $i \in \mathbb{N}$ và chỉ một số hữu hạn $a_i \neq 0$. Ta định nghĩa phép cộng và nhân trong P như sau:

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) + (b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n, \ldots);$$

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)(b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots) = (c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots)$$

trong đó $c_k = \sum\limits_{i+j=k} a_i b_j$.

Khi đó, P cùng với hai phép toán trên lập thành một vành giao hoán có đơn vị là $(1, 0, 0, \ldots)$, phần tử không của vành này là $(0, 0, 0, \ldots)$. Đặt

$x = (0, 1, 0, 0, \ldots)$ ta có

$$\begin{aligned} x^2 &= (0, 0, 1, 0, \ldots); \\ x^3 &= (0, 0, 0, 1, 0, \ldots); \\ &\ldots \\ x^n &= (0, 0, \ldots, 0, 1_n, 0, \ldots), \end{aligned}$$

ở đó 1_n là kí hiệu 1 ở vị trí thứ n. Nếu ta quy ước $x^0 = (1, 0, 0, \ldots)$ thì mỗi phần tử $a \in A$ có thể đồng nhất với dãy $(a, 0, 0, \ldots)$ (bởi vì ta có đơn cấu vành $A \longrightarrow P,\ a \longmapsto (a, 0, 0, \ldots)$). Như vậy,

$$ax^n = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n \text{ số } 0}, a, 0, \ldots), \quad \forall a \in A.$$

Do đó

$$f = (a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) = a_0x^0 + a_1x + \cdots + a_nx^n,$$

và thường được viết là

$$f(x) = a_0x^0 + a_1x + \cdots + a_nx^n.$$

Cách biểu thị như vậy là duy nhất đối với mỗi phần tử của $f \in P$. Hay nói một cách khác,

$$a_0x^0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = b_0x^0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$$

khi và chỉ khi

$$a_n = b_n, \ldots, a_1 = b_1, a_0 = b_0.$$

Khi đó, vành P được gọi là vành đa thức của ẩn x trên A, kí hiệu $A[x]$. Các phần tử của vành đó gọi là các đa thức của ẩn x lấy hệ số trong A. Đa thức $ax^n (a \in A)$ được gọi là một đơn thức.

1.2 Bậc của đa thức

1.2.1 Khái niệm và tính chất đơn giản

Cho đa thức $f(x) \in A[x]$, với

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i = a_0 + a_1x^1 + \cdots + a_nx^n \text{ với } a_n \neq 0$$

khi đó n được gọi là *bậc của đa thức* $f(x)$, kí hiệu là $\deg f(x)$. Hay nói một cách khác, bậc của đa thức là số mũ cao nhất của x xuất hiện trong đa thức. Đa thức không $f(x) = 0$ thường được hiểu là không có bậc, tuy nhiên các đa thức có bậc 0 cùng với đa thức không được gọi chung là các đa thức hằng.

Với các đa thức $f = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ và $g = \sum\limits_{j=0}^{m} b_j x^j$, ta viết $f = g$ nếu ta có $m = n$ và $a_i = b_i$ với mỗi i.

Không quá khó để thấy rằng, với hai đa thức $f(x)$ và $g(x)$ thì ta luôn có

$$\deg f(x) + \deg g(x) \leq \max(\deg f(x), \deg g(x))$$

và

$$\deg cf(x) = \deg f(x) \text{ nếu } c \neq 0.$$

Định lý 1.2.1. *Nếu A là một miền nguyên thì $A[x]$ cũng là một miền nguyên.*

Chứng minh. Giả sử $f(x), g(x) \in A[x]$ là các đa thức khác 0 có bậc tương ứng là m và n :

$$f(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_m \neq 0$$
$$g(x) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0, \quad b_n \neq 0.$$

Theo định nghĩa về phép toán trên đa thức ta có

$$f(x)g(x) = a_m b_n x^{m+n} + \cdots + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + a_0 b_0.$$

Vì A là miền nguyên và $a_m, b_n \neq 0$ nên $a_m b_n \neq 0$, do đó $f(x)g(x) \neq 0$.

Vậy $A[x]$ cũng là một miền nguyên. Định lý được chứng minh. □

Từ định lý trên ta có tính chất sau về bậc của đa thức.

Mệnh đề 1.2.1. *Nếu* $\deg f(x) = n, \deg g(x) = m$, *thì* $\deg(f(x)g(x)) = n + m$.

Ta nhận xét rằng, nếu A không là một miền nguyên thì mệnh đề trên không còn đúng. Thật vậy, xét các đa thức $\bar{2}x + \bar{1}$ và $\bar{3}x + \bar{1}$ là các đa thức bậc nhất trong $\mathbb{Z}_6[x]$ nhưng tích của chúng lại là một đa thức bậc nhất.

Định nghĩa 1.2.1. Giả sử A là một vành giao hoán có đơn vị và B là một vành giao hoán có đơn vị chứa A làm vành con. Phần tử $c \in B$ được gọi là nghiệm của đa thức $f(x) \in A[x]$ nếu và chỉ nếu $f(c) = 0$.

Định lý 1.2.2 (Bezout)**.** *Cho A là miền nguyên. Phần tử $c \in A$ là nghiệm của đa thức $f(x) \in A[x]$ nếu và chỉ nếu $f(x)$ chia hết cho $x - c$ trong vành đa thức $A[x]$.*

Định nghĩa 1.2.2. Phần tử $c \in A$ là nghiệm bội k của đa thức $f(x) \in A[x]$ nếu và chỉ nếu $f(x)$ chia hết cho $(x - c)^k$ nhưng $f(x)$ không chia hết cho $(x-c)^{k+1}$ trong vành đa thức $A[x]$. Nếu $k = 1$ thì c gọi là nghiệm đơn, $k = 2$ thì c được gọi là nghiệm kép.

Nếu $c_1, c_2, \ldots, c_r$ là những nghiệm trong miền nguyên A của $f(x) \not\equiv 0$ với các bội số theo thứ tự $k_1, k_2, \ldots, k_r$ thì

$$f(x) = (x - c_1)^{k_1}(x - c_2)^{k_2} \cdots (x - c_r)^{k_r} g(x)$$

với $g(x) \in A[x]$ và $g(c_i) \neq 0$. Do đó nghiệm của đa thức $f(x)$ không vượt quá bậc của đa thức $f(x)$ và nếu hai đa thức có bậc không quá n bằng nhau tại $n + 1$ phần tử phân biệt của miền nguyên A thì chúng bằng nhau.

1.2.2 Phân tích đa thức thành các thừa số bất khả quy

Cho $f(x)$ và $g(x)$ là các đa thức một biến với các hệ số trên trường K. Ta nói rằng $f(x)$ chia hết cho $g(x)$ nếu $g(x) \neq 0$ và tồn tại $h(x) \in K[x]$ sao cho $f(x) = g(x)h(x)$.

Định lý 1.2.3. *Cho $f(x)$ và $g(x)$ là các đa thức một biến với các hệ số trên trường K với $g(x) \neq 0$. Khi đó, ta luôn viết được $f(x) = g(x)p(x) + r(x)$ với $p(x), r(x)$ là các đa thức có hệ số trên K mà $\deg r(x) < \deg g(x)$.*

Đa thức $d(x)$ gọi là một ước chung của $f(x)$ và $g(x)$ nếu cả $f(x)$ và $g(x)$ cùng chia hết cho $d(x)$. Ước chung $d(x)$ của $f(x)$ và $g(x)$ được gọi là ước chung lớn nhất nếu $d(x)$ chia hết cho bất kì ước chung nào khác của $f(x)$ và $g(x)$. Một phương pháp nổi tiếng để tìm ước chung lớn nhất là thuật toán Euclide. Ta mô tả phương pháp này như sau: Giả sử rằng $\deg f(x) \geq \deg g(x)$. Đặt $r_1(x)$ là phần dư sau khi chia $f(x)$ cho $g(x)$ và đặt $r_2(x)$ là phần dư sau khi chia $g(x)$ cho $r_1(x)$, và tổng quát đặt $r_{k+1}(x)$ là phần dư sau khi chia $r_{k-1}(x)$ cho $r_k(x)$. Vì bậc của các đa thức $r_i(x)$ là giảm ngặt, nên với n nào đó, ta có $r_{n+1}(x) = 0$, tức là $r_{n-1}(x)$ chia hết cho $r_n(x)$. Ta thấy