ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

LÊ THỊ THU HƯỜNG

PHÂN TÍCH THAM SỐ CỦA IĐÊAN ĐƠN THỨC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

LÊ THỊ THU HƯỜNG

PHÂN TÍCH THAM SỐ CỦA IĐÊAN ĐƠN THỨC

Chuyên ngành: Đại số và lý thuyết số
Mã số: 604. 601. 04

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: TS. TRẦN NGUYÊN AN

THÁI NGUYÊN - 2016

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan rằng các kết quả trình bày trong luận văn này là không bị trùng lặp với các luận văn trước đây. Nguồn tài liệu sử dụng cho việc hoàn thành luận văn là các nguồn tài liệu mở. Các thông tin, tài liệu trong luận văn này đã được ghi rõ nguồn gốc.

Thái Nguyên, ngày ... tháng ... năm 2016

Tác giả luận văn

Lê Thị Thu Hường

Lời cảm ơn

Luận văn được hoàn thành trong khóa 22 đào tạo Thạc sĩ của trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, dưới sự hướng dẫn của TS.Trần Nguyên An, giảng viên khoa Toán Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới thầy hướng dẫn, người đã tạo cho tôi một phương pháp nghiên cứu khoa học đúng đắn, tinh thần làm việc nghiêm túc và đã dành nhiều thời gian, công sức giúp đỡ tôi hoàn thành luận văn.

Tôi cũng xin bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc tới các thầy cô giáo của trường Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học, những người đã tận tình giảng dạy, khích lệ, động viên tôi vượt qua những khó khăn trong học tập.

Tôi xin chân thành cảm ơn Ban lãnh đạo Khoa Sau đại học, Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên đã tạo mọi điều kiện thuận lợi, giúp đỡ tôi trong suốt thời gian tôi học tập.

Cuối cùng, tôi xin cảm ơn bạn bè, người thân và gia đình đã động viên, ủng hộ tôi cả về vật chất và tinh thần để tôi có thể hoàn thành tốt luận văn cũng như khóa học của mình.

Thái Nguyên, ngày ...tháng ... năm 2016

TÁC GIẢ

LÊ THỊ THU HƯỜNG

Mục lục

Mở đầu

Một trong những kết quả cơ bản trong đại số giao hoán là định lý phân tích bất khả quy được chứng minh bởi Emmy Noether năm 1921. Trong bài báo đó Emmy Noether đã chứng minh mọi iđêan bất kì trong vành Noether đều có thể viết thành giao hữu hạn của các iđêan bất khả quy và số các iđêan bất khả quy trong những biểu diễn như vậy là không phụ thuộc vào cách biểu diễn. Số đó được gọi là chỉ số khả quy của iđêan.

Việc tìm phân tích bất khả quy trên một vành bất kỳ là rất khó, do đó người ta thường nghiên cứu trên vành đa thức, cho lớp iđêan đặc biệt là iđêan đơn thức. Nghiên cứu iđêan đơn thức cho ta mối liên hệ giữa tổ hợp và đại số giao hoán. Gần đây phân tích bất khả quy của iđêan đơn thức trở thành vấn đề cơ bản và có nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực từ toán học thuần túy đến các môn khoa học khác.

Mục đích chính của luận văn là tìm hiểu phân tích bất khả quy cho một số lớp iđêan đặc biệt: một số dạng iđêan đơn thức; lũy thừa Frobenius của iđêan đơn thức; đặc biệt tìm hiểu về phân tích tham số của iđêan đơn thức. Luận văn dựa trên tài liệu tham khảo chính là bài giảng "Monomial ideals and their decomposition" của M. Rogers và S. Sather-Wagstaff [3] và một số ví dụ trong các cuốn sách [1], [2], [4].

Luận văn được bố cục làm hai chương. Để tiện theo dõi, chương 1 trình bày một số vấn đề về iđêan đơn thức; iđêan và đồ thị của iđêan đơn thức; tập sinh của iđêan đơn thức; các phép toán của iđêan đơn thức và iđêan m-bất khả quy.

Chương 2 tìm hiểu về sự phân tích m-bất khả quy, phân tích m-bất khả quy của một số lớp iđêan, đặc biệt là lớp iđêan tham số.

Chương 1

Iđêan đơn thức

Trong toàn bộ luận văn ta luôn quy ước vành là vành giao hoán khác 0 có đơn vị và thường được ký hiệu là A, $d > 0$ là một số nguyên, $R = A[X_1, \dots, X_d]$ là một vành đa thức d biến trên A. Ký hiệu $\underline{n} = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{N}^d; \underline{X}^{\underline{n}} = X_1^{n_1} X_2^{n_2} \dots X_d^{n_d}$. Khi đó mỗi đa thức $f \in R$ được biểu diễn dưới dạng

$$f = \sum_{\underline{n} \in \Lambda} a_{\underline{n}} \underline{X}^{\underline{n}}$$

Trong đó $\Lambda \subseteq \mathbb{N}^d$ là một tập con hữu hạn của $\mathbb{N}^d$ sao cho $a_{\underline{n}} \neq 0$ với $\underline{n} \in \Lambda$. Từ đây nếu không giải thích gì thêm khi nói đến vành R ta hiểu R là vành đa thức d biến trên A. Với $\underline{m} = (m_1, \dots, m_d), \underline{n} = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{N}^d$, $p \in \mathbb{N}$. Phép cộng và phép nhân vô hướng trên $\mathbb{N}^d$ xác định bởi:

$$\underline{n} + \underline{m} = (n_1 + m_1, \dots, n_d + m_d), p\underline{n} = (pn_1, \dots, pn_d).$$

Và $\underline{X}^{\underline{n}} \underline{X}^{\underline{m}} = \underline{X}^{\underline{n}+\underline{m}}, (\underline{X}^{\underline{m}})^p = \underline{X}^{p\underline{m}}$. Ta có quan hệ $\underline{m} \succcurlyeq \underline{n}$ khi và chỉ khi $m_i \geqslant n_i$, với mọi $i = 1, \dots, d$ là một quan hệ thứ tự trên $\mathbb{N}^d$. Ký hiệu $[\underline{n}] = \{\underline{m} \in \mathbb{N}^d \mid \underline{m} \succcurlyeq \underline{n}\} = \underline{n} + \mathbb{N}^d$. Dưới đây là một số kiến thức chuẩn bị cần thiết cho nội dung chính của luận văn, các kiến thức này được tham khảo trong [3].

1.1. Iđêan và đồ thị của iđêan đơn thức

Định nghĩa 1.1.1. Một *iđêan đơn thức* trong R là một iđêan của R sinh bởi các đơn thức.

Ví dụ 1.1.2. Đặt $R = A[X, Y]$.

(i) Iđêan $I = (X^2, Y^3)R$ là một iđêan đơn thức. Lưu ý I chứa đa thức $X^2 - Y^3$.

(ii) Iđêan $J = (Y^2 - X^3, X^3)R$ là một iđêan đơn thức vì $J = (Y^2, X^3)R$.

(iii) Iđêan tầm thường 0 và R là các iđêan đơn thức vì $0 = (\emptyset)R$ và $R = 1_R R = X_1^0 \ldots X_d^0 R$.

Định nghĩa 1.1.3. Với mỗi iđêan đơn thức $I \subseteq R$, tập hợp $[[I]]$ ký hiệu tập hợp tất cả các đơn thức trong I.

Chú ý 1.1.4. Với mỗi iđêan đơn thức khác không, $I \subseteq R$, tập hợp $[[I]] \subset R$ là một tập vô hạn nhưng không là iđêan. Theo định nghĩa, ta có $[[I]] = I \cap [[R]]$.

Bổ đề 1.1.5. *Với mỗi iđêan đơn thức $I \subseteq R$, ta có $I = ([[I]])R$.*

Mệnh đề 1.1.6. *Cho I và J là hai iđêan đơn thức của R. Khi đó*

(i) $I \subseteq J$ nếu và chỉ nếu $[[I]] \subseteq [[J]]$.

(ii) $I = J$ nếu và chỉ nếu $[[I]] = [[J]]$.

Định nghĩa 1.1.7. (i) Cho f và g là các đơn thức trong R. Khi đó f gọi là một *bội đơn thức* của g nếu có một đơn thức $h \in R$ sao cho $f = gh$.

(ii) Cho một đơn thức $f = \underline{X}^{\underline{n}} \in R$, bộ gồm d số tự nhiên $\underline{n} \in \mathbb{N}^d$ gọi là *vectơ lũy thừa* của f.

Bổ đề 1.1.8. *Cho $f = \underline{X}^{\underline{m}}$ và $g = \underline{X}^{\underline{n}}$ là các đơn thức trong R. Nếu h là một đa thức trong R sao cho $f = gh$ thì $m_i \geqslant n_i, i = 1, \ldots, d$ và h là đơn thức $h = \underline{X}^{\underline{p}}$, trong đó $p_i = m_i - n_i$.*

Ví dụ 1.1.9. Đặt $R = A[X, Y]$. Khi đó XY^7 không là bội của X^2Y, nhưng X^2Y^7 là một bội của X^2Y.

Bổ đề 1.1.10. *Cho $f = \underline{X}^{\underline{m}}$ và $g = \underline{X}^{\underline{n}}$ là các đơn thức trong R. Khi đó các điều kiện sau là tương đương:*

(i) $f \in gR$;

(ii) f là một bội của g;

(iii) f là một bội đơn thức của g;

(iv) $\underline{m} \succcurlyeq \underline{n}$;

(v) $\underline{m} \in [\underline{n}]$.

Định nghĩa 1.1.11. *Thứ tự chia hết* trên tập hợp đơn thức $[[R]]$ là thứ tự $\underline{X}^{\underline{m}} \succcurlyeq \underline{X}^{\underline{n}}$ khi $\underline{X}^{\underline{m}}$ là một bội của $\underline{X}^{\underline{n}}$.

Bổ đề 1.1.12. *Thứ tự chia hết trên $[[R]]$ là một quan hệ thứ tự.*

Định lý 1.1.13. *Cho $f, f_1, ..., f_m$ là các đơn thức trong R. Khi đó $f \in (f_1, ..., f_m)R$ nếu và chỉ nếu tồn tại i sao cho $f \in f_iR$.*

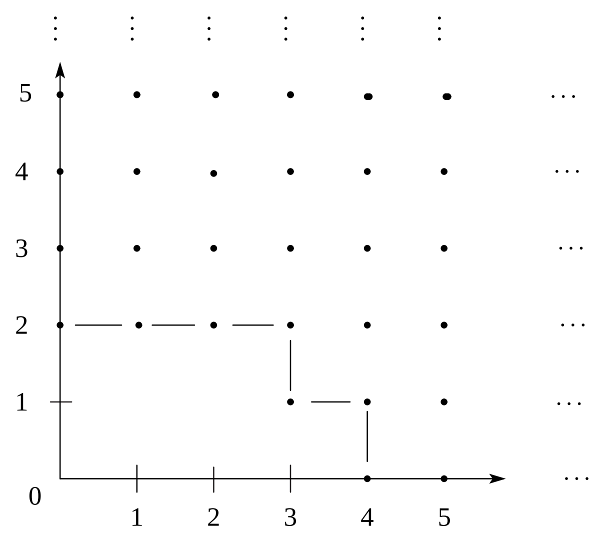
Chú ý 1.1.14. Định lí 1.1.13 không còn đúng nữa nếu các f_i không là đơn thức.

Định nghĩa 1.1.15. *Đồ thị* của một iđêan đơn thức I là tập hợp

$$\Gamma(I) = \{\underline{n} \in \mathbb{N}^d \mid \underline{X}^{\underline{n}} \in I\}.$$

Định lý 1.1.16. *Nếu $I = (\underline{X}^{\underline{n}_1}, ..., \underline{X}^{\underline{n}_m})R$ thì $\Gamma(I) = [\underline{n}_1] \cup ... \cup [\underline{n}_m]$.*

Ví dụ 1.1.17. (i) Đặt $R = A[X,Y]$. Đồ thị của iđêan $I = (X^4, X^3Y, Y^2)R$ là tập hợp $\Gamma(I) = [(4,0)] \cup [(3,1)] \cup [(0,2)] \subseteq \mathbb{N}^2$, được biểu diễn bởi sơ đồ Hình 1.1.

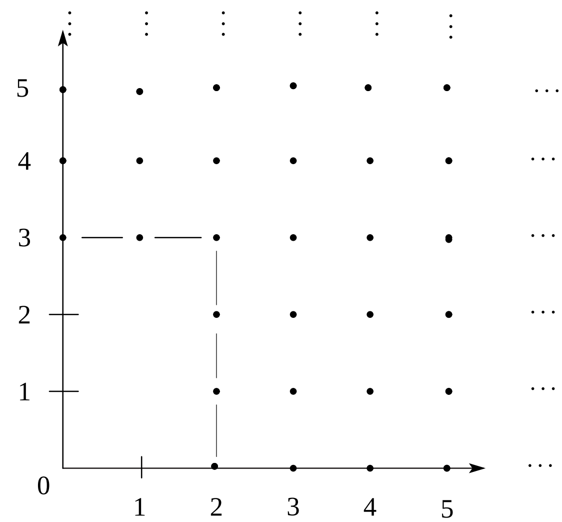


Hình 1.1:

(ii) Đặt $R = A[X,Y]$. Đặt $I = (X^2)R$ và $J = (Y^3)R$. Khi đó $I + J = (X^2, Y^3)R$. Theo Định lí 1.1.16, $\Gamma(I) = [(2,0)]$, $\Gamma(J) = [(0,3)]$ và

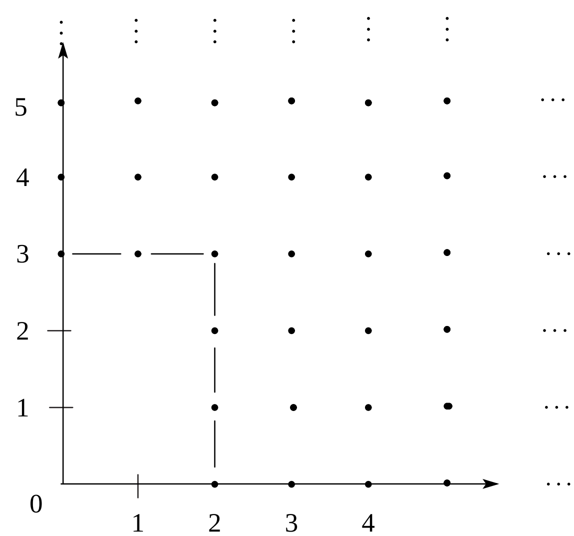
$$\Gamma(I+J) = [(2,0)] \cup [(0,3)] = \Gamma(I) \cup \Gamma(J).$$

Ta có đồ thị Hình 1.2.



Hình 1.2:

Nhận xét 1.1.18. Một tập con khác rỗng $\gamma \subseteq \mathbb{N}^d$ có dạng $\gamma = \Gamma(I)$ với iđêan đơn thức $I \subseteq A[X_1, ..., X_d]$ nếu và chỉ nếu với mỗi $\underline{m} \in \gamma$ và $\underline{n} \in \mathbb{N}^d$ ta có $\underline{m} + \underline{n} \in \gamma$. Chẳng hạn, đồ thị Hình 1.3 không có dạng $\gamma = \Gamma(I)$.



Hình 1.3: