ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

TRẦN THỊ HƯƠNG

ĐỊNH LÝ PICARD ĐỐI VỚI ĐẠO HÀM CỦA HÀM PHÂN HÌNH

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

TRẦN THỊ HƯƠNG

ĐỊNH LÝ PICARD ĐỐI VỚI ĐẠO HÀM CỦA HÀM PHÂN HÌNH

Chuyên ngành: GIẢI TÍCH
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
TS. VŨ HOÀI AN

Thái Nguyên - Năm 2016

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi, dưới sự hướng dẫn của TS. Vũ Hoài An. Luận văn không trùng với bất kì luận văn thạc sĩ nào và mọi tài liệu tham khảo trong luận văn là trung thực.

Học viên

Xác nhận	Xác nhận
của trưởng Khoa Toán	của người hướng dẫn khoa học

Lời cám ơn

Luận văn được hoàn thành tại Khoa sau đại học, Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn của Tiến sĩ Vũ Hoài An. Nhân dịp này, Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành và sâu sắc nhất đến Tiến sĩ Vũ Hoài An, người đã dành nhiều thời gian, tận tình, hướng dẫn giúp đỡ và tạo điều kiện để tôi hoàn thành tốt luận văn này.

Một lần nữa tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn đến các nhà toán học của Khoa Toán, Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên và Viện Toán học Việt Nam.

Xin chân thành cảm ơn gia đình, bạn bè và các thành viên trong lớp cao học K21 đã luôn ủng hộ và giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn này. Tuy có nhiều cố gắng, song thời gian và năng lực của bản thân có hạn nên luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong nhận được những ý kiến đóng góp của các nhà khoa học và bạn đọc. Tôi xin chân thành cảm ơn.

Thái Nguyên, tháng 08 năm 2016

Tác giả

Trần Thị Hương

Mục lục

Các kí hiệu

- $\mathbb{C}_p$: Trường số phức p-adic
- f : Hàm phân hình p-adic
- $N(r, f - a)$: Hàm đếm của f tại a
- $m(r, f)$: Hàm xấp xỉ của f
- $T(r, f)$: Hàm đặc trưng của f
- $O(1)$: Đại lượng giới nội
- $N_f(r), N_k(f, r)$: Hàm đếm, hàm đếm mức k

Mở đầu

Định lý Picard nói rằng: một hàm phân hình không nhận ba giá trị phân biệt là hàm hằng. Lý thuyết phân bố giá trị do Nevanlinna xây dựng với nội dung chính là hai định lý cơ bản. Định lý cơ bản thứ nhất là mở rộng Định lý cơ bản của đại số, mô tả sự phân bố đều giá trị của hàm phân hình khác hằng trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$. Định lý cơ bản thứ hai là mở rộng Định lý Picard, mô tả ảnh hưởng của đạo hàm đến sự phân bố giá trị của hàm phân hình. Hà Huy Khoái là người đầu tiên xây dựng tương tự Lý thuyết phân bố giá trị cho trường hợp p-adic. Ông và các học trò đã tương tự lý thuyết Nevanlinna cho trường số phức p-adic mà ngày nay thường gọi là lý thuyết Nevanlinna p-adic. Họ đã đưa ra hai Định lý chính cho hàm phân hình p-adic. Các kiểu Định lý Picard đã được nhiều nhà toán học trong và ngoài nước xét trong mối liên hệ với đạo hàm của hàm phân hình. Người khởi xướng hướng nghiên cứu này là Hayman. Năm 1967, Hayman đã chứng minh kết quả sau đây:

Định lí A.[7] Cho f là hàm phân hình trên $\mathbb{C}$. Nếu $f(z) \neq 0$ và $f^{(k)}(z) \neq 1$ với k là một số nguyên dương nào đó và với mọi $z \in \mathbb{C}$, thì f là hằng. Năm 1967, Hayman cũng đưa ra giả thuyết sau đây:

Giả thuyết Hayman.[7] Nếu một hàm nguyên f thỏa mãn $f^n(z) f'(z) \neq 1$ với n là một số nguyên dương nào đó và với mọi $z \in \mathbb{C}$, thì f là hằng. Giả thuyết Hayman đã được Hayman kiểm tra đối với hàm nguyên siêu việt và $n > 1$, đã được Clunie kiểm tra đối với $n \geq 1$. Các kết quả này và các vấn đề liên quan đã hình thành nhánh nghiên cứu được gọi là sự lựa chọn của Hayman. Tiếp đó, đối với các hàm nguyên f và g, C. C. Yang và G. G. Gundersen đã nghiên cứu trường hợp ở đó $f^{(k)}$ và $g^{(k)}$

nhận giá trị 0 CM, $k = 0, 1$.

Công trình quan trọng đầu tiên thúc đẩy hướng nghiên cứu này thuộc về C.C.Yang – X.H. Hua. Năm 1997, hai ông đã chứng minh định lý sau đây:

Định lí B.[16] Cho f và g là hai hàm phân hình khác hằng, $n \geq 11$ là một số nguyên và $a \in \mathbb{C}$ - $\{0\}$. Nếu $f^n f'$ và $g^n g'$ nhận giá trị a CM thì hoặc $f = dg$ với $d^{n+1} = 1$ hoặc $f(z) = c_1 e^{cz}$ và $g(z) = c_2 e^{-cz}$, ở đó c, c_1, c_2 là các hằng số và thỏa mãn $(c_1 c_2)^{n+1} c^2 = -a^2$.

Từ đó, hướng nghiên cứu trên phát triển mạnh mẽ với những kết quả sâu sắc của I. Lahiri, Q. Han – H. X. Yi, W. Bergweiler, J. K. Langley, K. Liu, L. Z. Yang, L. C. Hong, M. L. Fang, B. Q. Li, P. C. Hu - C.C.Yang, A. Eremenko, G. Frank - X. Hua – R. Vaillancourt .... Công cụ sử dụng ở đó là một số kiểu Định lý Picard và Định lý chính thứ hai cho đa thức vi phân cùng với các ước lượng giữa hàm đặc trưng, hàm đếm của hàm và đạo hàm. Tuy nhiên, ở Việt nam, hướng nghiên cứu trên là mới mẻ, các kết quả ở lĩnh vực này hiện nay ít ỏi. Nhằm thúc đẩy và góp phần làm phong phú các kết quả đối với hướng nghiên cứu này ở trong nước, tôi nghiên cứu đề tài :

Định lý Picard đối với đạo hàm của hàm phân hình

Trong luận văn này tôi sẽ trình bày các kết quả về vấn đề nhận giá trị của đạo hàm của hàm phân hình và tương tự p-adic của nó. Trình bày định lý Picard đối với đạo hàm của hàm phân hình và tương tự p-adic của nó. Đây là một trong những vấn đề mang tính thời sự và cấp thiết của giải tích p-adic, được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu.

Ngoài phần mở đầu và tài liệu tham khảo, luận văn được chia thành 2 chương:

Chương 1. Định lý Picard đối với đạo hàm của hàm phân hình. Kết quả chính của chương 1 là các Định lý 1.7, 1.11, 1.13.

Chương 2. Trình bày lại định lý Picard đối với đạo hàm của hàm phân hình p-adic. Kết quả chính của chương 2 là các Định lý 2.3, 2.6, 2.9, 2.11, 2.12, 2.13.

Chương 1

Định lý Picard đối với đạo hàm của hàm phân hình

Trong chương 1 chúng tôi trình bày lại các kết quả trong [3],[16].
- Định lý Picard đối với đạo hàm của hàm phân hình. Mục tiêu của các Định lý kiểu Picard là xem xét vấn đề nhận giá trị của một số kiểu đa thức vi phân.
- Vấn đề duy nhất đối với đạo hàm của hàm phân hình. Đây là một ứng dụng của các Định lý kiểu Picard và Định lý chính thứ hai của lý thuyết phân bố giá trị.

1.1 Định lý Picard đối với đạo hàm của hàm phân hình

Cho $n > 1$, f là hàm nguyên khác hằng trên $\mathbb{C}$ và z_0 bất kỳ thuộc $\mathbb{C}$. Khi đó ta có thể viết f ở dạng

$$f = \sum_{n=q}^{\infty} a_n (z-b)^n$$

với $a_q \neq 0$ và ta đặt $\mu_f^0(z) = q$.
Đối với mỗi $a \in \mathbb{C}$, k, l là các số nguyên dương, ta định nghĩa hàm $\mu_f^a : \mathbb{C} \to \mathbb{N}$ bởi $\mu_f^a(z) = \mu_{f-a}^0(z)$,

$$n(r,\frac{1}{f-a})=\sum_{|z|\leq r}\mu_{f-a}(z),\; n_l(r,\frac{1}{f-a})=\sum_{|z|\leq r}min\left\{\mu_{f-a}(z),l\right\},$$

$$N(r,\frac{1}{f-a})=\int_1^r\frac{n(x,\frac{1}{f-a})}{x}dx,\; N_l(r,\frac{1}{f-a})=\int_1^r\frac{n_l(x,\frac{1}{f-a})}{x}dx.$$

Ta định nghĩa hàm $\mu_f^{\leq k}$ từ $\mathbb{C}_p$ vào $\mathbb{N}$ xác định bởi:

$$\mu_f^{\leq k}(z)=\begin{cases}0 \quad \text{nếu} \quad \mu_f^0(z)>k\\ \mu_f^0(z) \quad \text{nếu} \quad \mu_f^0(z)\leq k\end{cases};$$

$$n^{\leq k}(r,\frac{1}{f-a})=\sum_{|z|\leq r}\mu_{f-a}^{\leq k}(z),\; n_l^{\leq k}(r,\frac{1}{f-a})=\sum_{|z|\leq r}min\left\{\mu_{f-a}^{\leq k}(z),l\right\},$$

$$N^{\leq k}(r,\frac{1}{f-a})=\frac{1}{lnp}\int_{\rho_0}^r\frac{n^{\leq k}(r,\frac{1}{f-a})}{x}dx,$$

$$N_l^{\leq k}(r,\frac{1}{f-a})=\frac{1}{lnp}\int_{\rho_0}^r\frac{n_l^{\leq k}(x,\frac{1}{f-a})}{x}dx.$$

Tương tự ta định nghĩa:

$$N^{<k}(r,\frac{1}{f-a}),N_l^{<k}(r,\frac{1}{f-a}),N^{>k}(r,\frac{1}{f-a}),N^{\geq k}(r,\frac{1}{f-a}),$$

$$N_l^{\geq k}(r,\frac{1}{f-a}),N_l^{>k}(r,\frac{1}{f-a}).$$

Giả sử $f=\dfrac{f_1}{f_2}$, là hàm phân hình trên $\mathbb{C}$, ở đó f_1,f_2 là các hàm nguyên trên $\mathbb{C}$ không có không điểm chung.
Với mỗi $a\in\ \mathbb{C}$, k, l là các số nguyên dương, ta định nghĩa hàm

$$\mu_f^a(z)=\mu_{f_1-af_2}^0(z) \text{ nếu } a\neq\infty \text{ và } \mu_f^\infty(z)=\mu_{f_2}(z),$$

$$m(r,f)=\int_0^{2\pi}log^+\left|f(re^{i\theta})\right|\frac{d\theta}{2\pi}.$$

$N(r,\frac{1}{f-a})=N(r,\frac{1}{f_1-af_2}),N(r,f)=N(r,\frac{1}{f_2}),T(r,f)=N(r,f)+m(r,f).$