ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

LƯƠNG THỊ THƯƠNG

BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN ĐƠN ĐIỆU VÀ PHƯƠNG PHÁP HIỆU CHỈNH

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

LƯƠNG THỊ THƯƠNG

BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN ĐƠN ĐIỆU VÀ PHƯƠNG PHÁP HIỆU CHỈNH

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 60.46.01.12

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

PGS. TS. ĐỖ VĂN LƯU

Thái Nguyên - 2016

Mục lục

Lời cảm ơn

Luận văn này được thực hiện tại Trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên và hoàn thành dưới sự hướng dẫn của PGS. TS. Đỗ Văn Lưu. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất tới thầy, người đã tận tình hướng dẫn tác giả trong quá trình nghiên cứu và viết bản luận văn này.

Trong quá trình học tập và làm luận văn, từ bài giảng của các Giáo sư, Phó Giáo sư công tác tại Viện Toán học, Viện Công nghệ Thông tin - Viện Hàm lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam, trường Đại học Khoa học Tự nhiên - Đại học Quốc gia Hà Nội, các Thầy Cô trong Đại học Thái Nguyên, cùng với sự giúp đỡ nhiệt tình của PGS. TS. Nguyễn Thị Thu Thủy, đã truyền thụ kiến thức cho tác giả trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn. Tác giả xin bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc tới các Thầy Cô.

Tác giả chân thành cảm ơn Lãnh đạo trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên, Ban chủ nhiệm khoa Toán – Tin, cùng toàn thể các thầy cô trong trường đã giảng dạy và giúp đỡ cho tác giả trong suốt thời gian học tập tại Trường.

Tác giả xin bày tỏ lòng cảm ơn tới tập thể lớp Cao học Toán K8C (khóa 2014-2016), bạn bè, đồng nghiệp và gia đình đã tạo điều kiện, động viên, giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập, nghiên cứu.

Thái Nguyên, ngày 20 tháng 9 năm 2016

Tác giả luận văn

Lương Thị Thương

Bảng ký hiệu

$\mathbb{R}$	trường số thực
$\mathbb{N}^*$	tập các số tự nhiên khác 0
$\mathbb{R}^n$	không gian Euclide n-chiều
H	không gian Hilbert thực
X	không gian Banach thực
Ω	tập con đóng lồi của X
C	tập con lồi đóng khác rỗng của X
$\emptyset$	tập rỗng
$\forall x$	mọi x
$\exists x$	tồn tại x
$\min f(x)$	cực tiểu của hàm $f(x)$
$\inf\limits_{x \in X} F(x)$	infimum của tập $\{F(x) : x \in X\}$
$\langle x, y \rangle$	tích vô hướng của hai vectơ x và y
$\|x\|$	chuẩn của véctơ x
$x_n \to x$	x_n hội tụ mạnh đến x
$x_n \rightharpoonup x$	x_n hội tụ yếu đến x
T	toán tử đơn điệu trong không gian Hilbert
I	toán tử đồng nhất trong H
I_Ω	hàm chỉ của tập Ω
∂I_Ω	dưới vi phân của hàm chỉ
$D(T)$	miền xác định của toán tử T
$R(T)$	miền giá trị của toán tử T
$Gr(T)$	đồ thị của toán tử T
int C	phần trong của tập hợp C
∇f	gradient của hàm f
∂f	dưới vi phân của hàm lồi f

Mở đầu

Cho X là một không gian Banach thực. Ký hiệu X^* là không gian liên hợp của X, C là một tập con lồi đóng khác rỗng của X, $A : X \to X^*$ là một ánh xạ phi tuyến. Bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian Banach (viết tắt là VI(A, C)) được phát biểu như sau: Tìm phần tử $x^* \in X$ thỏa mãn:

$$x^* \in C : \quad \langle Ax^*, x - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in C. \tag{0.1}$$

Bất đẳng thức biến phân VI(A, C) được đưa ra và nghiên cứu đầu tiên bởi Stampacchia (xem [6]) vào những năm đầu của thập kỷ 60 trong khi nghiên cứu bài toán biên của phương trình đạo hàm riêng. Từ đó phương pháp bất đẳng thức biến phân được quan tâm nghiên cứu rộng rãi và trở thành một công cụ hữu hiệu trong việc xây dựng các kỹ thuật để giải số nhiều bài toán trong kinh tế và kỹ thuật. Mặc dù đã có rất nhiều kết quả nghiên cứu về phương pháp giải bất đẳng thức biến phân, nhưng việc cải tiến các phương pháp nhằm gia tăng hiệu quả của nó luôn là một đề tài thời sự, được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu.

Trong không gian Hilbert H, bất đẳng thức biến phân VI(A, C) tương đương với bài toán điểm bất động:

$$x^* = P_C(x^* - \mu Ax^*), \tag{0.2}$$

ở đây P_C là phép chiếu mêtric từ H lên tập lồi đóng C của H và $\mu > 0$ là hằng số tùy ý. Do đó, phương pháp chiếu và một số biến thể của phương pháp có thể được dùng để giải bất đẳng thức biến phân (0.1). Nếu ánh xạ A đơn điệu mạnh và liên tục Lipschitz trên C và hằng số $\mu > 0$ đủ nhỏ, thì ánh xạ được xác định bởi vế phải của (0.2) là ánh xạ co. Do đó, nguyên lý ánh xạ co Banach bảo đảm rằng dãy lặp Picard

$$u_{n+1} = P_C(u_n - \mu A(u_n)) \tag{0.3}$$

hội tụ mạnh tới nghiệm duy nhất của bài toán (0.1). Phương pháp chiếu không dễ dàng thực thi vì sự phức tạp của tập lồi C bất kỳ. Để khắc phục nhược điểm này, Yamada [7] đã đề xuất phương pháp lai đường dốc nhất vào năm 2001 để giải bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động của ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert H.

Chú ý rằng, bài toán điểm bất động của ánh xạ không giãn, nói chung, là bài toán đặt không chỉnh. Do đó, bài toán bất đẳng thức biến phân VI(A, C), nói chung, cũng là bài toán đặt không chỉnh theo nghĩa nghiệm của bài toán không phụ thuộc liên tục vào dữ kiện ban đầu. Để giải bài toán này, chúng ta phải sử dụng những phương pháp giải ổn định. Một trong những phương pháp được sử dụng rộng rãi và khá hiệu quả là phương pháp hiệu chỉnh Browder–Tikhonov (xem [4] và các tài liệu trích dẫn). Mục đích của đề tài luận văn nhằm trình bày lại một số kết quả trong [4] về hiệu chỉnh bất đẳng thức biến phân đơn điệu trong không gian Banach.

Nội dung của luận văn được trình bày trong hai chương. Chương 1 với tiêu đề "Bất đẳng thức biến phân đơn điệu" nhằm giới thiệu một số khái niệm và tính chất về không gian Banach, không gian Hilbert, ánh xạ đơn điệu và bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian Euclid và không gian Banach. Nội dung của chương này được tham khảo trong các tài liệu [1]-[3].

Chương hai với tiêu đề "Hiệu chỉnh bất đẳng thức biến phân đơn điệu" nhằm giới thiệu phương pháp hiệu chỉnh bất đẳng thức biến phân đơn điệu với toán tử nhiễu đơn điệu cực đại và ánh xạ đối ngẫu suy rộng, đồng thời trình bày phương pháp chọn tham số hiệu chỉnh theo nguyên lý độ lệch suy rộng. Nội dung của chương này tham khảo từ tài liệu [4].

Chương 1

Bất đẳng thức biến phân đơn điệu

Chương này trình bày khái niệm về không gian Banach, không gian Hilbert; bất đẳng thức biến phân đơn điệu trong không gian Euclid và không gian Banach; một số ví dụ về bất đẳng thức biến phân đơn điệu. Các kiến thức của chương này được tham khảo từ các tài liệu [1]-[3].

1.1 Toán tử đơn điệu

1.1.1 Một số tính chất của không gian Banach

Cho X là không gian Banach thực phản xạ, X^* là không gian liên hợp của X, cả hai có chuẩn đều được kí hiệu là $\|.\|$, kí hiệu $S_X := \{x \in X : \|x\| = 1\}$ là mặt cầu đơn vị của không gian Banach X, kí hiệu $\langle x^*, x\rangle$ là giá trị của phiếm hàm tuyến tính liên tục $x^* \in X^*$ tại $x \in X$.

Định nghĩa 1.1.1 Không gian Banach X được gọi là không gian lồi chặt nếu với $x, y \in S_X,\ x \neq y$ suy ra

$$\|(1-\lambda)x + \lambda y\| < 1, \quad \forall \lambda \in (0,1).$$

Định nghĩa 1.1.2 Không gian Banach thực X được gọi là không gian có tính chất Ephimov-Stechkin (hay không gian có tính chất E-S) nếu X phản xạ và trong X sự hội tụ yếu các phần tử $\big(x_n \rightharpoonup x\big)$ và sự hội tụ chuẩn $\big(\|x_n\| \to \|x\|\big)$ luôn kéo theo sự hội tụ mạnh $\big(\|x_n - x\| \to 0\big)$.

Định nghĩa 1.1.3 Cho X là không gian lồi địa phương và $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Khi đó,

(i) Hàm f được gọi là nửa liên tục dưới tại $\bar{x} \in X$ (với $f(\bar{x}) < \infty$), nếu với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại lân cận U của $\bar{x}$ sao cho

$$f(\bar{x}) - \epsilon \leq f(y) \quad \forall y \in U;$$

(ii) Hàm f được gọi là nửa liên tục dưới trên X nếu f nửa liên tục dưới tại mọi $\bar{x} \in X$.

1.1.2 Không gian Hilbert

Định nghĩa 1.1.4 Cho H là không gian tuyến tính trên $\mathbb{R}$, tích vô hướng xác định trong H là một ánh xạ

$$\begin{aligned} \langle .,. \rangle : H \times H &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

thỏa mãn các điều kiện sau đây:

1. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ với mọi $x, y \in H$;
2. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ với mọi $x, y, z \in H$;
3. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ với mọi $x, y \in H$, $\lambda \in \mathbb{R}$;
4. $\langle x, x \rangle \geq 0$ với mọi $x \in H$ và $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Số $\langle x, y \rangle$ được gọi là tích vô hướng của hai vectơ x, y trong H.

Định nghĩa 1.1.5 Cặp $(H, \langle .,. \rangle)$, trong đó H là một không gian tuyến tính trên $\mathbb{R}$, $\langle .,. \rangle$ là tích vô hướng trên H được gọi là không gian tiền Hilbert thực.

Định lý 1.1.6 *Mọi không gian tiền Hilbert H đều là không gian tuyến tính định chuẩn, với chuẩn được xác định bởi công thức*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad \forall x \in H. \tag{1.1}$$

Chuẩn này được gọi là chuẩn cảm sinh từ tích vô hướng.

Định nghĩa 1.1.7 Nếu H là không gian tiền Hilbert thực và đầy đủ đối với chuẩn cảm sinh từ tích vô hướng xác định bởi (1.1) thì H được gọi là không gian Hilbert thực.

Ví dụ 1.1.8 Không gian $\mathbb{R}^n$ là một không gian Hilbert với tích vô hướng

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

Trong đó

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n);\;\; y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

và chuẩn cảm sinh

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

Định nghĩa 1.1.9 Tập hợp $C \subseteq H$ được gọi là tập lồi nếu

$$\forall x_1, x_2 \in C,\;\; \forall \lambda \in [0,1] \Rightarrow \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in C.$$

Định nghĩa 1.1.10 Tập $C \subset H$ được gọi là tập đóng nếu mọi dãy hội tụ $\{x_n\} \subset C$ đều có giới hạn thuộc C, nghĩa là với mọi $\{x_n\} \subset C$ sao cho $x_n \to x$ kéo theo $x \in C$.

Định lý 1.1.11 *Nếu C là một tập lồi đóng trong không gian Hilbert H thì tồn tại một phần tử duy nhất $x_0 \in C$ sao cho*

$$\|x_0\| \leq \|x\| \quad \textit{với mọi} \quad x \in C.$$

Chứng minh. Áp dụng đẳng thức hình bình hành, với mọi $x, y \in C$ ta có

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\| + \|y\|)^2.$$

Do đó

$$\|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) - 4\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2. \tag{1.2}$$

Đặt $d = \inf_{x\in C} \|x\|$. Vì C là một tập lồi nên $\dfrac{x+y}{2} \in C$, kéo theo $\left\|\dfrac{x+y}{2}\right\| \geq d$. Từ (1.2) ta có

$$\|x-y\|^2 \leq 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) - 4d^2. \tag{1.3}$$