ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC
———o0o———

NGUYỄN MẠNH HÀ

PHƯƠNG PHÁP XẤP XỈ MỀM LAI GHÉP GIẢI BÀI TOÁN ĐIỂM BẤT ĐỘNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———o0o———

NGUYỄN MẠNH HÀ

PHƯƠNG PHÁP XẤP XỈ MỀM LAI GHÉP GIẢI BÀI TOÁN ĐIỂM BẤT ĐỘNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 60.46.01.12

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

GS.TS. NGUYỄN BƯỜNG

Thái Nguyên - 2016

Mục lục

Bảng ký hiệu

$\mathbb{R}$	tập số thực
$\mathbb{N}$	tập hợp các số tự nhiên
$\mathbb{N}^*$	tập hợp các số tự nhiên khác 0
H	không gian Hilbert
X	không gian Banach
$\emptyset$	tập rỗng
$\forall x$	mọi x
$\exists x$	tồn tại x
$\langle .,. \rangle$	tích vô hướng
$\|x\|$	chuẩn của vectơ x
$x_n \to x$	$\{x_n\}$ hội tụ mạnh đến x
$x_n \rightharpoonup x$	$\{x_n\}$ hội tụ yếu đến x
I	toán tử đồng nhất
$\cap$	phép giao
$\inf A$	cận dưới đúng của tập hợp A
$\sup A$	cận trên đúng của tập hợp A
$\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$	giới hạn trên của dãy số x_n
$\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$	giới hạn dưới của dãy số x_n
$Fix(T)$	tập điểm bất động của ánh xạ T

Mở đầu

Lý thuyết điểm bất động đóng vai trò rất quan trọng trong Toán học. Nó có nhiều ứng dụng trong lý thuyết bất đẳng thức biến phân, lý thuyết tối ưu, lý thuyết xấp xỉ, lý thuyết kinh tế... Nhiều nhà toán học đã mở rộng những kết quả của bài toán điểm bất động của ánh xạ trong không gian Hilbert và không gian Banach. Trong đó đề cập đến sự tồn tại điểm bất động; phương pháp lặp xấp xỉ mềm, phương pháp lai ghép tìm điểm bất động. Luận văn này nhấn mạnh đến cách kết hợp giữa phương pháp xấp xỉ mềm và phương pháp lai ghép trong việc giải bài toán điểm bất động của một ánh xạ không giãn và của một họ các ánh xạ không giãn trong không gian Banach. Luận văn được cấu trúc như sau:

Chương 1: *Một số khái niệm cơ bản.* Chương này trình bày các nội dung sau: Khái niệm và một số đặc trưng của không gian Banach; Khái niệm điểm bất động và một số phương pháp tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert và không gian Banach (Phương pháp lặp Mann, Phương pháp lặp Halpern, Phương pháp lặp Ishikawa, Phương pháp xấp xỉ mềm, Phương pháp chiếu đường dốc).

Chương 2: *Phương pháp xấp xỉ mềm lai ghép giải bài toán điểm bất động.* Chương này nêu Phương pháp xấp xỉ mềm lai ghép giải bài toán điểm bất động nhiều cấp của một ánh xạ không giãn và của một họ đếm được các ánh xạ không giãn.

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn tận tình của GS.TS Nguyễn Bường. Qua đây, tác giả xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc tới Thầy đã dành thời gian và tâm huyết để hướng dẫn, tạo điều kiện cho tác giả trong suốt thời gian làm luận văn.

Thái nguyên, tháng 9 năm 2016

Học viên: Nguyễn Mạnh Hà

Chương 1

Một số vấn đề cơ bản

Trong chương gồm 02 mục: Mục 1.1 trình bày không gian Banach và một số đặc trưng của không gian Banach; mục 1.2 đề cập đến khái niệm điểm bất động và một số phương pháp cơ bản tìm điểm bất động. Các kiến thức trong chương được tổng hợp từ các tài liệu [1]-[6].

1.1 Không gian Banach và một số đặc trưng của không gian Banach

Các không gian Banach được định nghĩa là các không gian định chuẩn đầy đủ. Nghĩa là một không gian Banach là một không gian X trên trường số thực hay số phức với một chuẩn $\|.\|$ sao cho mọi dãy Cauchy có giới hạn trong X.

Dưới đây, ta sẽ chỉ ra một số ví dụ về không gian Banach với K ký hiệu cho trường số thực hoặc số phức.

Không gian Euclid quen thuộc K^n với chuẩn Euclid của x được cho bởi $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ là không gian Banach.

Không gian của tất cả các hàm số liên tục $f : [a, b] \to K$ xác định trên một đoạn đóng $[a, b]$ trở thành một không gian Banach nếu ta định nghĩa chuẩn của hàm số như sau: $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$. Không gian này được ký hiệu là $C_{[a,b]}$.

Nếu V và W là các không gian Banach trên cùng một trường K, tập hợp các hàm K-tuyến tính liên tục $A : V \to W$ được ký hiệu là $L(V, W)$. Vì $L(V, W)$ là một không gian vectơ và bằng cách định nghĩa chuẩn $\|A\| = \sup\{\|Ax\| : x \in V, \ \|x\| \leq 1$. Ta có $L(V, W)$ là một không gian Banach. Nếu V là một không gian Banach và K là một trường nền (số thực hoặc số phức) thì bản thân K là một không gian Banach và ta có thể định nghĩa không gian đối ngẫu V^* như là $L(V, K)$, không gian của biến đổi tuyến tính liên tục vào K. Không gian này lại là không gian Banach với chuẩn của toán tử.

Định nghĩa 1.1.1 Cho X là không gian Banach. Gọi $U = \{x \in X : \|x\| = 1\}$.

(*i*) X được gọi là lồi đều nếu với mỗi $\epsilon \in (0, 2]$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $x,\ y \in U$

$$\|x - y\| \geq \epsilon \text{ thỏa mãn } \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta.$$

(*ii*) X được gọi là trơn nếu giới hạn

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \tag{1.1}$$

tồn tại với mọi $x,\ y \in U$.
X được gọi là trơn đều nếu giới hạn (1.1) đạt được đều với $x,\ y \in U$.

(*iii*) Chuẩn của X gọi là khả vi Gâteaux đều nếu với mỗi $y \in U$, giới hạn (1.1) đạt được đều với $x \in U$.

Định nghĩa 1.1.2 Cho số thực $q > 1$. Ánh xạ đối ngẫu tổng quát J_q từ X vào X^* được định nghĩa như sau

$$J_q(x) = \left\{x^* \in X^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^q,\ \|x^*\| = \|x\|^{q-1}\right\}$$

với mọi $x \in X$. Ánh xạ $J = J_2$ được gọi là ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc và

$$J_q(x) = \|x\|^{q-2} J(x) \text{ với mọi } x \in X$$

Ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc J có các tính chất sau:

(*i*) Nếu X là không gian lồi chặt thì J là ánh xạ $1 - 1$ và

$$\langle x - y, x^* - y^* \rangle > 0 \text{ với } (x, x^*),\ (y, y^*) \in J,\ x \neq y;$$

(*ii*) Nếu X là không gian phản xạ thì J là toàn ánh;

(*iii*) Nếu X là không gian trơn đều thì J liên tục đều theo chuẩn trên mỗi tập con bị chặn của X.

Định nghĩa 1.1.3 Cho C là tập con lồi đóng, khác rỗng của X. Ánh xạ $T : C \to C$ được gọi là L-Lipshitzian nếu tồn tại hằng số $L > 0$ sao cho $\|Tx - Ty\| \leq L\|x - y\|, \ \forall x, y \in C$.

Nếu $L = 1$ thì T được gọi là không giãn.

Định nghĩa 1.1.4 Cho C là tập con khác rỗng của không gian Banach X. Một ánh xạ $A : C \to X$ được gọi là:

(a) accretive nếu $x, y \in C, \ \exists j(x - y) \in J(x - y)$ sao cho

$$\langle Ax - Ay, j(x - y)\rangle \geq 0;$$

(b) α-accretive mạnh nếu $x, y \in C, \ \exists j(x - y) \in J(x - y)$ sao cho

$$\langle Ax - Ay, j(x - y)\rangle \geq \alpha\|x - y\|^2, \quad \alpha \in (0, 1);$$

(c) Giả co nếu $x, y \in C, \ \exists j(x - y) \in J(x - y)$ sao cho

$$\langle Ax - Ay, j(x - y)\rangle \leq \|x - y\|^2;$$

(d) β-giả co mạnh nếu $x, y \in C, \ \exists j(x - y) \in J(x - y)$ sao cho

$$\langle Ax - Ay, j(x - y)\rangle \leq \beta\|x - y\|^2, \quad \alpha \in (0, 1);$$

(e) λ-giả co chặt nếu $x, y \in C, \ \exists j(x - y) \in J(x - y)$ sao cho

$$\langle Ax - Ay, j(x - y)\rangle \leq \|x - y\|^2 - \lambda\|x - y - (Ax - Ay)\|^2, \quad \lambda \in (0, 1);$$

(f) Dương mạnh nếu tồn tại hằng số $\bar{\gamma} > 0$ sao cho $\langle Ax, J(x)\rangle \geq \bar{\gamma}\|x\|^2, \quad \beta \in (0, 1), \|aI - bA\| = \sup_{\|x\| \leq 1} | \langle (aI - bA)x, Jx\rangle |$, với mọi $a \in [0, 1], \ b \in [-1, 1]$, I là ánh xạ đồng nhất.

Mệnh đề 1.1.5 *Cho C là tập con lồi đóng, khác rỗng của một không gian Banach trơn đều X. Cho $T : C \to C$ là ánh xạ giả co liên tục với $Fix(T) \neq \emptyset$ và $f : C \to C$ là ánh xạ giả co mạnh thỏa mãn điều kiện Lipshitzian với hệ số giả co $\beta \in (0, 1)$ và hằng số Lipshitzian $L > 0$. Cho$A : C \to C$ là toán tử tuyến tính dương bị chặn với hằng số $\bar{\gamma} > 0$. Giả sử rằng $C \pm C \subset C$ và $0 < \beta < \bar{\gamma}$. Cho dãy $\{x_t\}$ được xác định bởi $x_t = tf(x_t) + (I - tA)Tx_t$. Khi đó nếu $t \to 0$ thì $\{x_t\}$ hội tụ mạnh* *đến một điểm z nào đó sao cho $z \in Fix(T)$ là nghiệm duy nhất của bài toán bất đẳng thức biến phân sau:*

$$\langle (A-f)z, J(z-p)\rangle \leq 0,\ \forall p \in Fix(T).$$

Cho C là tập con lồi đóng, khác rỗng của một không gian Banach trơn đều X sao cho $C \pm C \subset C$. Cho $T : C \to C$ là một ánh xạ không giãn với $Fix(T) \neq \emptyset$ và $f : C \to C$ là ánh xạ giả co mạnh thỏa mãn điều kiện Lipschitzian với hệ số giả co $\beta \in (0,1)$ và hằng số Lipschitzian $L > 0$. Cho $F : C \to C$ là ánh xạ accretive mạnh và λ-giả co chặt với $\alpha + \lambda > 1$ và $A : C \to C$ là toán tử tuyến tính dương bị chặn. Ta đưa vào lược đồ gắn kết lai ghép ẩn để giải bài toán điểm bất động nhiều cấp của ánh xạ không giãn T:

$$x_t = (I - \theta_t A)Tx_t + \theta_t[Tx_t - t(F(Tx_t) - f(x_t))],$$

trong đó $0 < \theta_t \leq \|A\|^{-1},\ \lim\limits_{t\to 0} \theta_t = 0$. Ta chứng minh được khi $t \to 0$, $\{x_t\}$ hội tụ mạnh đến một điểm $z \in Fix(T)$ là nghiệm duy nhất của bài toán bất đẳng thức biến phân:

$$\langle (A-I)z, J(z-p)\rangle \leq 0, \quad \forall p \in Fix(T).$$

Mặt khác, cho $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ là một họ đếm được những ánh xạ không giãn từ C vào chính nó sao cho $\Omega = \cap_{i=0}^{\infty} Fix(T_i) \neq \emptyset$.

Người ta đề xuất phương pháp xấp xỉ mềm lai ghép ẩn để giải bài toán điểm bất động của một họ ánh xạ không giãn $\{T_n\}$:

$$\begin{cases} x_0 \in C \\ y_n = \alpha_n f(y_n) + \beta_n x_n = \big((1-\beta_n)I - \alpha_n A\big)T_n y_n \\ x_{n+1} = \gamma_n f(y_n) + (I - \gamma_n F)T_n y_n,\ \forall n \geq 0, \end{cases}$$

trong đó $f : C \to C$ là ánh xạ co cố định và $\{\alpha_n\},\ \{\beta_n\},\ \{\gamma_n\}$ là ba dãy trong $(0,1)$. Dãy $\{x_n\}$ hội tụ đến một điểm $z \in \Omega$ với z là nghiệm duy nhất của bài toán bất đẳng thức biến phân:

$$\langle (A-f)z, J(z-p)\rangle \leq 0, \quad \forall p \in \Omega.$$

Ngoài ra, người ta còn đề xuất một phương pháp xấp xỉ mềm lai ghép hiện để giải bài toán điểm bất động nhiều bậc của một họ ánh xạ không giãn $\{T_n\}$:

$$\begin{cases} x_0 \in C \\ x_{n+1} = (I - \beta_n A)T_n x_n + \beta_n [T_n x_n - \alpha_n (F(Tx_n) - f(x_n))], \ \forall n \geq 0, \end{cases}$$

trong đó, $f : C \to C$ là ánh xạ co cố định và $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ là hai dãy trong $(0, 1)$. Dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh đến một điểm $z \in \Omega$ với z là nghiệm duy nhất của bài toán bất đẳng thức biến phân:

$$\langle (A - I)z, J(z - p) \rangle \leq 0, \quad \forall p \in \Omega.$$

Bổ đề 1.1.6 *Cho dãy* $\{s_n\} \subset \mathbb{R}$ *thỏa mãn:*

$$s_{n+1} \leq (1 - \alpha_n)s_n + \alpha_n \beta_n + \gamma_n, \quad \forall n \geq 0.$$

Trong đó, các dãy $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$ *thỏa mãn các điều kiện:*

(i) $\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$*;*

(ii) $\limsup_{n\to\infty} \beta_n \leq 0$;

(iii) $\gamma_n \geq 0$ $(\forall n \geq 0)$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \gamma_n < \infty$.

Khi đó $\limsup\limits_{n\to\infty} s_n = 0$.

Bổ đề 1.1.7 *Cho dãy* $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ *sao cho* $a_{n+1} \leq (1 - \gamma_n)a_n + \gamma_n \beta_n$, $\forall n \geq 0$. *Trong đó* $\{\gamma_n\} \subset (0, 1)$, $\{\beta_n\} \subset \mathbb{R}$ *thỏa mãn các điều kiện:*

(i) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \gamma_n = \infty$;

(ii) $\limsup_{n\to\infty} \beta_n \leq 0$.

Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Bổ đề 1.1.8 *Cho* X *là không gian Banach trơn. Khi đó:*

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\langle y, J(x + y) \rangle, \quad \forall x, y \in X.$$

Gọi LIM là một phiếm hàm tuyến tính liên tục trên l^∞ và $(a_0, a_1, \cdots) \in l^\infty$. Kí hiệu $LIMa_n = LIM(a_0, a_1, \cdots)$. LIM được gọi là