ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THIỆN HUY

PHƯƠNG PHÁP HÀM PHẠT CHÍNH XÁC VÀ ĐIỀU KIỆN CẦN TỐI ƯU

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

---------------- ---------------

NGUYỄN THIỆN HUY

PHƯƠNG PHÁP HÀM PHẠT CHÍNH XÁC VÀ ĐIỀU KIỆN CẦN TỐI ƯU

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành :Toán ứng dụng
Mã số : 60 46 01 12

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
PGS.TS. Đỗ Văn Lưu

THÁI NGUYÊN - 2016

Mục lục

Bảng ký hiệu

NLP	Bài toán quy hoạch phi tuyến
SON	Điều kiện cần cấp 2
KKT	Điều kiện cần cấp 1
GCQ	Điều kiện chính quy Guignand cấp 1
SGCQ	Điều kiện chính quy Guignand cấp 2
LICQ	Điều kiện chính quy độc lập tuyến tính
$epi\ \ f$	Trên đồ thị của hàm f
$\widehat{\partial} f\left(\overline{x}\right)$	Dưới vi phân chính quy của f tại $\overline{x}$
$T_A\left(\overline{x}\right)$	Nón tiếp tuyến của A tại $\overline{x}$
$\widehat{N}_A f\left(\overline{x}\right)$	Nón pháp tuyến chính quy của A tại $\overline{x}$
$posA$	Bao dương của A
A^∞	Nón horizon của A
$\delta_A(x)$	Hàm chỉ của tập A

Mở đầu

Lý thuyết các điều kiện tối ưu là một bộ phận quan trọng của lý thuyết tối ưu hóa, trong đó các điều kiện tối ưu cấp 1 và cấp 2 đóng vai trò quan trọng. Các điều kiện cần tối ưu được thiết lập bằng phương pháp sử dụng trực tiếp các định lý tách các tập lồi không tương giao hoặc qua việc thiết lập các định lý luân phiên, hoặc phương pháp hàm phạt chính xác và một vài phương pháp khác. Phương pháp hàm phạt chính xác tỏ ra rất hiệu quả trong việc dẫn các điều kiện cần tối ưu cấp 1 và cấp 2. Bằng phương pháp hàm phạt chính xác, Meng., K và Yang., X (2015) đã dẫn các điều kiện cần tối ưu cấp 1 và cấp 2 cho bài toán quy hoạch phi tuyến có ràng buộc đẳng thức và bất đẳng thức với các hàm khả vi liên tục cấp 2, trong đó các tác giả đã sử dụng dưới vi phân chính quy của số hạng phạt và các điều kiện chính quy thích hợp. Đặc biệt Meng -Yang đã nhận được các điều kiện cần tối ưu cấp 1 và cấp 2 bằng cách sử dụng hàm phạt chính xác lp $(0 < p < 1)$. Đây là đề tài có tính thời sự và được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu. Chính vì vậy, tôi chọn đề tài: "Phương pháp hàm phạt chính xác và điều kiện cần tối ưu".

Luận văn trình bày các điều kiện cần tối ưu cấp 1 và cấp 2 của Meng - Yang (2015) cho bài toán quy hoạch phi tuyến (NLP) có ràng buộc đẳng thức và bất đẳng thức bằng phương pháp hàm phạt chính xác. Bằng cách sử dụng dưới gradient chính quy, các điều kiện cần và đủ để một số hạng phạt thuộc loại Karush - Kuhn - Tucker (KKT) được trình bày. Với điều kiện chính quy cấp 2, các điều kiện cần tối ưu cấp 2 được trình bày qua hàm phạt chính xác l_p $(0 < p < 1)$.

Luận văn được chia làm hai chương:

Chương 1: Phương pháp hàm phạt chính xác và điều kiện cần tối ưu cấp 1

Chương 1 trình bày các điều kiện cần tối ưu cấp 1 cho bài toán quy hoạch phi tuyến, các điều kiện cần và đủ để số hạng phạt tổng quát là KKT và số hạng phạt bậc thấp là KKT qua dưới vi phân chính quy của số hạng phạt.

Chương 2: Phương pháp hàm phạt chính xác và điều kiện cần tối ưu cấp 2

Chương 2 trình bày các điều kiện cần tối ưu cấp 2 cho bài toán quy hoạch phi tuyến qua tính chính xác của hàm phạt. Điều này làm được nhờ áp dụng định lý đối ngẫu của quy hoạch tuyến tính và điều kiện chính quy cấp 2.

Nhân dịp này, tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành đến Ban Giám hiệu, Phòng Đào tạo, khoa Toán - Tin của trường Đại học Khoa hoc - Đại học Thái Nguyên, cùng các thầy cô giáo đã tham gia giảng dạy đã giúp đỡ tác giả trong thời gian theo học các chuyên đề và hoàn thành các công việc của một học viên cao học.

Thái Nguyên, ngày 20 tháng 10 năm 2016

Tác giả

Nguyễn Thiện Huy

Chương 1

Phương pháp hàm phạt chính xác và điều kiện cần tối ưu cấp 1

Chương 1 trình bày các kết quả về điều kiện KKT cho bài toán quy hoạch phi tuyến (NLP) bằng phương pháp hàm phạt chính xác của Meng - Yang ([7], 2015). Các điều kiện cần và đủ để số hạng phạt tổng quát và số hạng phạt bậc thấp là KKT qua dưới vi phân chính quy của số hạng phạt được trình bày trong chương này. Chú ý rằng số hạng phạt Φ thuộc loại KKT tại điểm cực tiểu địa phương $\overline{x}$ của bài toán NLP nếu điều kiện KKT đúng tại $\overline{x}$ khi mà hàm phạt $f + \mu\Phi$ là hàm phạt chính xác tại $\overline{x}$.

1.1 Các khái niệm và định nghĩa

Kí hiệu $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ và $\mathbb{R}_+ := \{t \in \mathbb{R} |\, t \geq 0\}$.

Kí hiệu x^T là chuyển vị của vectơ $x \in \mathbb{R}^n$, $\langle x, y\rangle$ là tích vô hướng của x và $y \in \mathbb{R}^n$, $x^{\perp} = \{v |\, \langle v, x\rangle = 0\}$ là phần bù trực giao của không gian vectơ con tuyến tính sinh bởi x, $\|x\|$ là chuẩn Euclidean của x. Với $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ và $p > 0$, ta kí hiệu $f(x)^p := (f(x))^p, \ \forall x \in \mathbb{R}^n$, với quy ước $(+\infty)^p = +\infty$. Với một tập con A của $\mathbb{R}^n$, kí hiệu bao đóng, phần trong, biên, bao lồi của A, tương ứng là ClA, intA, bdA và convA (xem [1]).

Nón cực của A được định nghĩa bởi

$$A^* := \{v \in \mathbb{R}^n |\, \langle v, x\rangle \leq 0, \ \forall x \in A\}.$$

Bao dương của A được xác định bởi

$$\mathrm{pos}A := \{\lambda x|\, x \in A, \lambda \geq 0\}.$$

Nón horizon của A là tập các phương của A được xác định bởi

$$A^{\infty} := \{x \in \mathbb{R}^n | \exists x_k \in A, \exists \lambda_k \downarrow 0,\ \ \lambda_k x_k \to x\}.$$

Hàm khoảng cách của A được xác định bởi

$$\mathrm{d}_A(x) := \inf_{y \in A} \|x - y\|.$$

Hàm chỉ của A xác định bởi

$$\delta_A(x) := \begin{cases} 0, & \text{khi } x \in A, \\ +\infty, & \text{khi } x \notin A. \end{cases}$$

Nếu $A = \varnothing$ thì ta quy ước

$A^* := \mathbb{R}^n, \mathrm{pos}A := \{0\}, A^{\infty} = \{0\}, d_A(\cdot) := +\infty$, và $\delta_A(\cdot) := +\infty$.

Nhắc lại một số khái niệm hình học biến phân của A tại $\overline{x} \in A$:

Định nghĩa 1.1.1.

(i) Véctơ $w \in \mathbb{R}^n$ thuộc nón tiếp tuyến $T_A(\overline{x})$ của A tại $\overline{x}$, nếu $\exists t_k \downarrow 0$ và $w_k \to w$ sao cho $\overline{x} + t_k w_k \in A$ với $\forall k$.

(ii) Nón pháp tuyến chính quy $\widehat{N}_A(\overline{x})$ của A tại $\overline{x}$ là nón cực của $T_A(\overline{x})$.

(iii) Véctơ $z \in \mathbb{R}^n$ thuộc nón tiếp tuyến cấp 2 của A tại $\overline{x}$ theo véctơ $w \in T_A(\overline{x})$, kí hiệu $T_A^2(\overline{x} \mid w)$, nếu $\exists$ dãy $t_k \downarrow 0$ và $z_k \to z$ sao cho $\overline{x} + t_k w + \frac{1}{2}{t_k}^2 z_k \in A$ với $\forall k$. Khi $w \notin T_A(\overline{x}), T_A^2(\overline{x} \mid w)$ là tập $\emptyset$.

Giả sử $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ là hàm giá trị thực mở rộng. Miền hữu hiệu của f là tập

$$\mathrm{dom}\, f := \{x \in \mathbb{R}^n |\, f(x) < +\infty\}.$$

Hạch của f là tập

$$\ker f := \{x \in \mathbb{R}^n |\, f(x) = 0\}.$$

Trên đồ thị của f là tập

$$\mathrm{epi}\, f := \{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} |\, \alpha \geq f(x)\}.$$

Hàm f là nửa liên tục dưới nếu epi f là đóng trong $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Hơn nữa f được gọi là thuần nhất dương nếu $0 \in \operatorname{dom} f$ và $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ với $\forall x$ và $\lambda > 0$, và f là dưới tuyến tính nếu

$$f(x + x') \leq f(x) + f(x'),\ \ \forall x, x'.$$

Giả sử $\overline{x}$ là một điểm mà $f(\overline{x})$ hữu hạn. Các khái niệm dưới gradient, dưới đạo hàm (subderivative):

Định nghĩa 1.1.2.

(i) Véctơ $v \in \mathbb{R}^n$ là dưới gradient chính quy của f tại $\overline{x}$, ta viết $v \in \widehat{\partial} f(\overline{x})$, nếu

$$f(x) \geq f(\overline{x}) + \langle v, x - \overline{x} \rangle + o(\|x - \overline{x}\|).$$

(ii) Với bất kỳ $w \in \mathbb{R}^n$, dưới đạo hàm f tại $\overline{x}$ theo w được xác định bởi

$$\mathrm{d}f(\overline{x})(w) := \liminf_{\tau \downarrow 0, w' \to w} \frac{f(\overline{x} + \tau w') - f(\overline{x})}{\tau}.$$

(iii) Với véctơ bất kỳ w với $\mathrm{d}f(\overline{x})(w)$ hữu hạn và $z \in \mathbb{R}^n$, dưới đạo hàm parabolic của f tại $\overline{x}$ theo w và z được xác định bởi

$$\mathrm{d}^2 f(\overline{x})(w|\, z) = \liminf_{\tau \downarrow 0, z' \to z} \frac{f\left(\overline{x} + \tau w + \frac{1}{2}\tau^2 z'\right) - f(\overline{x}) - \tau \mathrm{d}f(\overline{x})(w)}{\frac{1}{2}\tau^2}.$$

Với $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ và điểm bất kỳ $\overline{x}$ mà $f(\overline{x})$ hữu hạn, hàm dưới đạo hàm $\mathrm{d}f(\overline{x}) : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ nửa liên tục dưới và thuần nhất dương và dưới vi phân chính quy $\widehat{\partial} f(\overline{x})$ đóng và lồi. Hơn nữa, ta có 2 công thức sau:

$$\text{epi } \mathrm{d}f(\overline{x}) = T_{\mathrm{epi}f}(\overline{x}, f(\overline{x})), \tag{1.1}$$

$$\widehat{\partial} f(\overline{x}) = \{v \in \mathbb{R}^n |\, \langle v, w \rangle \leq \mathrm{d}f(\overline{x})(w)\ \ \forall w \in \operatorname{dom} \mathrm{d}\, f(\overline{x})\}. \tag{1.2}$$

Bài toán quy hoạch phi tuyến NLP được nghiên cứu trong chương này có dạng:

$$\begin{aligned} &\min f(x), \\ &\quad g_i(x) \leq 0, i \in I := \{1, 2, ..., m\}, \\ &\quad h_j(x) = 0, j \in J := \{m+1, m+2, ..., m+q\}, \end{aligned}$$

trong đó $f, g_i, h_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ được giả thiết là khả vi liên tục 2 lần. Giả sử C là tập chấp nhận được của NLP và $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m+q} \to \mathbb{R}$ là hàm

Lagrange được xác định bởi

$$L(x,\lambda) := f(x) + \sum_{i\in I} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j\in J} \lambda_j h_j(x).$$

Điều kiện KKT đúng tại điểm cực tiểu địa phương $\overline{x}$ của NLP (xem [5]) nếu $\exists \lambda \in \mathbb{R}^{m+q}$ (gọi là nhân tử KKT) sao cho

$$\nabla_x L(\overline{x},\lambda) = 0, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \lambda_i g_i(\overline{x}) = 0,\ \forall i \in I.$$

Kí hiệu tập các nhân tử KKT tại $\overline{x}$ là KKT($\overline{x}$), và nón tới hạn tại $\overline{x}$ là

$$\nu(\overline{x}) := \left\{ w \in \mathbb{R}^n \left| \begin{array}{c} \langle \nabla f(\overline{x}), w\rangle \leq 0 \\ \langle \nabla g_i(\overline{x}), w\rangle \leq 0,\ \forall i \in I \text{ mà } g_i(\overline{x}) = 0 \\ \langle \nabla h_j(\overline{x}), w\rangle = 0,\ \forall j \in J \end{array} \right. \right\}.$$

Điều kiện cần cấp 2 SON đúng tại điểm cực tiểu $\overline{x}$ của NLP (xem [5]), nếu

$$\sup_{\lambda \in \mathrm{KKT}(\overline{x})} \left\langle w, \nabla^2_{xx} L(\overline{x},\lambda) w \right\rangle \geq 0, \qquad \forall w \in \nu(\overline{x}), \tag{1.3}$$

trong đó quy ước $\sup \emptyset := -\infty$. Phải chú ý rằng SON (1. 3) đúng tại $\overline{x}$ thì điều kiện KKT đúng tại $\overline{x}$, tức là $KKT(\overline{x}) \neq \emptyset$.

Hàm phạt $l_p\,(0 \leq p \leq 1)$ ghép với NLP được xác định như sau

$$\mathcal{F}_p(x) := f(x) + \mu S^p(x),\ \ \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

ở đây số thực không âm μ là tham số phạt, hàm S được xác định bởi

$$S(x) := \sum_{i\in I} \max\{g_i(x), 0\} + \sum_{j\in J} |h_j(x)|,\ \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Hàm $S^p(x) := (S(x))^p$ là số hạng phạt cấp p và quy ước $0^0 = 0$ trong trường hợp $p = 0$.

Ngoài ra S^p, ta xét hàm nửa liên tục dưới bất kỳ
$\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ có tính chất

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n |\, \phi(x) = 0\},$$

như một số hạng phạt tổng quát cho NLP. Tương ứng với số hạng phạt như thế có một hàm phạt có dạng $f + \mu\Phi$ ghép với NLP. Hàm phạt $f + \mu\Phi$ bao gồm tất cả các hàm phạt $l_p\,(0 \leq p \leq 1)$ như các trường hợp đặc biệt.