ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

BÙI VĂN HOAN

TOÁN TỬ CHIẾU VÀ ỨNG DỤNG VÀO BÀI TOÁN TỐI ƯU LỒI KHÔNG TRƠN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

BÙI VĂN HOAN

TOÁN TỬ CHIẾU VÀ ỨNG DỤNG VÀO BÀI TOÁN TỐI ƯU LỒI KHÔNG TRƠN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 60 46 01 12

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

GS.TSKH. LÊ DŨNG MƯU

Thái Nguyên - 2016

Mục lục

Danh mục các kí hiệu và các từ viết tắt

- $\mathbb{R}^n$: Không gian Euclide n-chiều trên trường số thực.
- $\langle , \rangle$: Tích vô hướng.
- $\|.\|$: Chuẩn.
- $\overline{A}$: Bao đóng của A.
- co$A$: Bao lồi của A.
- aff$A$: Bao affine của A.
- int$A$: Tập hợp các điểm trong của A.
- ri$A$: Tập hợp các điểm trong tương đối của A.
- $N_C(x)$: Nón pháp tuyến ngoài của C tại x.
- $N_C^{\epsilon}(x)$: ϵ-nón pháp tuyến của C tại x.
- $P_C(x)$: Hình chiếu của x lên C.
- $d_C(x)$: Khoảng cách từ điểm x đến tập C.
- dom$f$: Tập hợp hữu dụng của f.
- epi$f$: Trên đồ thị của f.
- ∇f hay $f'(x)$: Đạo hàm của f tại x.
- $f'(x, d)$: Đạo hàm theo phương d của f tại x.
- $\partial f(x)$: Dưới vi phân của f tại x.
- $\partial_{\epsilon} f(x)$: ϵ-dưới vi phân của f tại x.

MỞ ĐẦU

Giải tích lồi nghiên cứu về tập lồi và hàm lồi có một vị trí quan trọng trong toán học, liên quan đến hầu hết các lĩnh vực khác nhau của toán học ứng dụng như trong tối ưu hóa, bài toán cân bằng, ...

Bài toán cực tiểu hàm lồi trên môt tập lồi, thường được gọi là quy hoạch lồi, là lớp bài toán quan trọng của Quy hoạch toán học. Bài toán này xuất hiện trong nhiều ứng dụng khác nhau. Nó cũng là bài toán phụ trong nhiều phương pháp giải các bài toán tối ưu, bất đẳng thức biến phân và cân bằng. Một hướng nghiên cứu cho đến nay vẫn được quan tâm là xây dựng các phương pháp giải hữu hiệu, đặc biệt là cho bài toán tối ưu lồi, không trơn.

Mục đích của luận văn này là trình bày bài toán cực tiểu hàm lồi với ràng buộc lồi và sử dụng toán tử chiếu để giải bài toán tối ưu lồi. Cụ thể, luận văn đi sâu vào việc trình bày thuật toán chiếu dưới đạo hàm, là một kết quả mới thu được trong thời gian gần đây.

Nội dung của luận văn gồm hai chương:

Chương 1: Tập lồi, hàm lồi và toán tử chiếu
Trong chương này, ta trình bày các kiến thức về tập lồi, hàm lồi, toán tử chiếu và cùng với các tính chất đặc trưng của nó.

Chương 2: Bài toán tối ưu lồi
Trong chương này, ta trình bày các khái niệm và các tính chất cơ bản của bài toán cực tiểu hàm lồi với ràng buộc lồi. Đó là sự tồn tại nghiệm tối ưu và điều kiện tối ưu của bài toán lồi trơn và không trơn. Nội dung chính của chương này là trình bày một thuật toán giải bài toán cực tiểu hàm không trơn như thuật toán chiếu dưới đạo hàm.

Qua luận văn này, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy giáo hướng dẫn GS.TSKH. Lê Dũng Mưu, người thầy đã tận tình hướng dẫn, giúp đỡ tôi trong suốt quá trình làm và hoàn thiện luận văn. Tôi cũng xin gửi lời cảm ơn tới các thầy giáo, cô giáo trong Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên đã tận tình giảng dạy và giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập. Đồng thời, tôi cũng gửi lời cảm ơn tới gia đình và bạn bè đã luôn động viên, giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập và làm luận văn tốt nghiệp.

Thái Nguyên, tháng 6 năm 2016
Tác giả
Bùi Văn Hoan

Chương 1

Tập lồi, hàm lồi và toán tử chiếu

Trong chương này, ta trình bày những khái niệm cơ bản nhất của tập lồi, hàm lồi, toán tử chiếu và cùng với các tính chất đặc trưng của nó. Nội dung của chương được trích dẫn chủ yếu từ tài liệu tham khảo [1], [2], [3] và [4].

1.1 Tập lồi

Trong luận văn này chúng ta kí hiệu $\mathbb{R}^n$ là không gian Euclide thực n chiều. Một phần tử $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ là một vectơ cột với n thành phần là các số thực.

Định nghĩa 1.1. *Một đường thẳng đi qua hai điểm a và b trong $\mathbb{R}^n$ là tập hợp các điểm $x \in \mathbb{R}^n$ có dạng*

$$\{x \in \mathbb{R}^n : x = \lambda a + (1-\lambda)b, \forall \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Định nghĩa 1.2. *Một đoạn thẳng đi qua hai điểm a và b trong $\mathbb{R}^n$ là tập hợp các điểm $x \in \mathbb{R}^n$ có dạng*

$$\{x \in \mathbb{R}^n : x = \lambda a + (1-\lambda)b, \forall \lambda \in [0,1]\}.$$

Tập lồi là một khái niệm cơ bản nhất của giải tích lồi, nó được định nghĩa như sau:

Định nghĩa 1.3. *Một tập hợp $C \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là lồi nếu:*

$$\forall a, b \in C, 0 \leq \lambda \leq 1 \Rightarrow \lambda a + (1-\lambda) b \in C.$$

Ví dụ 1.4. *+ Tập rỗng là một tập lồi.*

+ Toàn bộ không gian là tập lồi.

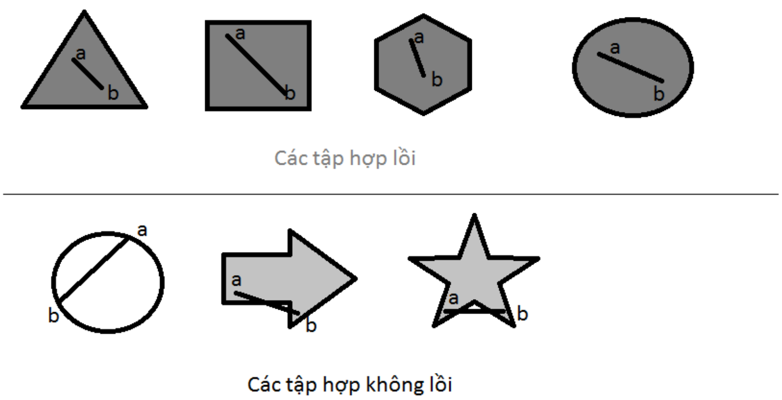
+ Các không gian con là các tập lồi.

+ Các hình tam giác, hình tròn trong mặt phẳng là các tập lồi.

+ Hình cầu $C = \{x : \| x \| \leq 1\}$ là tập lồi.

+ Đường tròn trong mặt phẳng là tập không lồi.

Một số hình vẽ về tập lồi và tập không lồi trong $\mathbb{R}^2$:



Hình 1.1

Định nghĩa 1.5. *Ta nói x là tổ hợp lồi của các điểm $x^1, \ldots, x^k$ nếu*

$$x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^j, \lambda_j > 0, \forall j = 1, \ldots, k, \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1.$$

Tương tự, x là tổ hợp affine của các điểm $x^1, \ldots, x^k$ nếu

$$x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^j, \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1.$$

Mệnh đề 1.6. *Tập hợp C là lồi khi và chỉ khi nó chứa mọi tổ hợp lồi của các điểm của nó. Tức là C lồi khi và chỉ khi*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k > 0 : \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1, \forall x^1, x^2, \ldots, x^k \in C \Rightarrow \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^i \in C.$$

Chứng minh. Điều kiện đủ là hiển nhiên từ định nghĩa. Ta chứng minh điều kiện cần bằng quy nạp theo số điểm. Với $k = 2$, điều cần chứng minh được suy ra ngay từ định nghĩa của tập lồi và tổ hợp lồi. Giả sử mệnh đề đúng với $k - 1$ điểm. Ta cần chứng minh đúng với k điểm.
Giả sử x là tổ hợp lồi của k điểm $x^1, x^2, \ldots, x^k \in C$. Tức là

$$x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^j, \lambda_j > 0, \forall j = 1, \ldots, k, \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1.$$

Ta đặt

$$\gamma = \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j.$$

Khi đó $0 < \gamma < 1$ và

$$x = \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j x^j + \lambda_k x^k = \gamma \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\lambda_j}{\gamma} x^j + \lambda_k x^k.$$

Do $\sum_{j=1}^{k-1} \frac{\lambda_j}{\gamma} = 1$ và $\frac{\lambda_j}{\gamma} > 0, \forall j = 1, \ldots, k-1$ nên theo giả thiết quy nạp, điểm

$$y := \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\lambda_j}{\gamma} x^j \in C.$$

Suy ra

$$x = \gamma y + \lambda_k x^k.$$

Do $\gamma > 0, \lambda_k > 0$ và

$$\gamma + \lambda_k = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1,$$

nên x là tổ hợp lồi của hai điểm y và x^k đều thuộc C. Vậy $x \in C$. □

Mệnh đề 1.7. *Nếu A, B là các tập lồi trong $\mathbb{R}^n$, C là lồi trong $\mathbb{R}^m$ thì các tập sau là tập lồi:*

$$A \cap B := \{x | x \in A \text{ và } x \in B\},$$
$$\alpha A + \beta B := \{x : x = \alpha a + \beta b, a \in A, b \in B\},$$
$$A \times C := \{x \in \mathbb{R}^{n+m} | x = (a, c), a \in A, c \in C\}.$$

Định nghĩa 1.8. *Tập C được gọi là tập affine nếu nó chứa đường thẳng đi qua hai điểm bất kì của nó, tức là:*

$$\forall x, y \in C, \forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \in C.$$

Một ví dụ về tập affine là siêu phẳng trong $\mathbb{R}^n$, được định nghĩa như sau.

Định nghĩa 1.9. *Siêu phẳng trong không gian $\mathbb{R}^n$ là một tập hợp các điểm x có dạng*

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n | a^T x = \alpha\},$$

trong đó $a \in \mathbb{R}^n$ là vectơ khác 0, gọi là vectơ pháp tuyến của H và $\alpha \in \mathbb{R}$.

Trong $\mathbb{R}^n$, siêu phẳng H chia $\mathbb{R}^n$ thành hai nửa không gian.

Định nghĩa 1.10. *Nửa không gian đóng là một tập hợp có dạng*

$$\{x \in \mathbb{R}^n | a^T x \geq \alpha\}.$$

Nửa không gian mở là một tập hợp có dạng

$$\{x \in \mathbb{R}^n | a^T x > \alpha\}.$$

Mệnh đề 1.11. *Cho $M \neq \emptyset$ là một tập affine khi và chỉ khi $M = a + L$, với L là một không gian con và $a \in M$. Không gian con L này xác định và duy nhất.*

Định nghĩa 1.12. *Một tập được gọi là một tập lồi đa diện nếu nó là giao của một số hữu hạn các nửa không gian đóng.*

Định nghĩa 1.13. *Một điểm a của tập lồi C gọi là điểm trong tương đối nếu với mọi $x \in C$ đều có một số $\lambda > 0$ để cho $a + \lambda(x - a) \in C$. Tập các điểm trong tương đối của C được kí hiệu là riC.*

Định nghĩa 1.14. *Một tập C được gọi là nón nếu*

$$\forall \lambda > 0, \forall x \in C \Rightarrow \lambda x \in C.$$

Định nghĩa 1.15. *Tập C được gọi là nón lồi nếu C đồng thời là một nón và là một tập lồi.*