ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

HOÀNG MINH HIẾU

VỀ CHỨNG MINH GIẢ THUYẾT ERDÖS-SZEKERES CHO TRƯỜNG HỢP $n = 6$

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

HOÀNG MINH HIẾU

VỀ CHỨNG MINH GIẢ THUYẾT ERDÖS-SZEKERES CHO TRƯỜNG HỢP $n = 6$

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 60 46 01 13

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS.TS. TẠ DUY PHƯỢNG

Thái Nguyên - 2016

Mục lục

Danh mục hình

LỜI MỞ ĐẦU

Năm 1932, Esther Klein đã có nhận xét sau đây:

Từ năm điểm bất kì cho trước trên mặt phẳng ở vị trí tổng quát (không có ba điểm nào thẳng hàng), bao giờ cũng tìm được bốn điểm tạo thành tứ giác lồi.

Esther Klein cũng đặt bài toán:

Cho n *là một số tự nhiên. Hỏi số điểm tối thiểu* $\mathrm{ES}(n)$ *ở vị trí tổng quát trên mặt phẳng là bao nhiêu để có thể từ đó lấy ra* n *điểm là đỉnh của đa giác lồi* n *cạnh*?

Năm 1935, Paul Erdös và György Szekeres [7] đã phát biểu:

Giả thuyết Erdös–Szekeres (1935, [7]) *Với mỗi số tự nhiên* $n \geq 3$, *mọi tập có tối thiểu* $\mathrm{ES}(n) = 2^{n-2} + 1$ *điểm trên mặt phẳng ở vị trí tổng quát* (*không có ba điểm nào thẳng hàng*), *đều chứa n điểm là đỉnh của một đa giác lồi n cạnh.*

Giả thuyết Erdös–Szekeres cũng được gọi là *Bài toán Erdös–Szekeres*.

Mặc dù giả thuyết Erdös–Szekeres đã được phát biểu cách đây 80 năm, nhưng mới chỉ có câu trả lời khẳng định cho ba trường hợp: $n = 4$ (E. Klein, 1932, [6]); $n = 5$ (Đoàn Hữu Dũng, 1967, [1]; Kalbfleisch J. D., Kalbfleisch J. G., and Stanton R. G. , 1970, [9] ; Bonice, 1974, [2],...) và $n = 6$ (G. Szekeres and L. Peters, 2006, [14], chứng minh bằng máy tính; K. Dehnhardt, H. Harborth, and Z. Lángi, 2009, [5] cho một trường hợp riêng).

Luận văn *Về chứng minh giả thuyết Erdös-Szekeres cho trường hợp* $n = 6$ có mục đích chính là trình bày chứng minh giả thuyết Erdös-Szekeres cho trường hợp $n = 6$, dựa trên hai bài báo [5] và [14].

Luận văn gồm hai chương.

Chương 1: Tổng quan về giả thuyết Erdös–Szekeres.

Trình bày tổng quan về giả thuyết Erdös–Szekeres, chứng minh công thức $\mathrm{ES}(n) = 2^{n-2} + 1$ với $n = 4, 5$.

Chương 2: Chứng minh giả thuyết Erdös–Szekeres cho trường hợp $n = 6$.

Trình bày chứng minh giả thuyết Erdös–Szekeres cho $n = 6$ trong một trường hợp riêng (theo bài báo [5]) và trình bày chứng minh bằng máy tính giả thuyết Erdös-Szekeres (theo bài báo [14]) cho trường hợp $n = 5$ và $n = 6$.

Luận văn của tác giả được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn khoa học của PGS.TS. Tạ Duy Phượng.

Tác giả xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc đến thầy giáo, người hướng dẫn khoa học của mình, PGS.TS. Tạ Duy Phượng, người đã tận tình giúp đỡ tác giả trong suốt quá trình nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn các thầy, cô giáo trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên và Viện Toán học đã tận tâm giảng dạy và giúp đỡ tác giả hoàn thành khóa học.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn Ban giám hiệu trường Phổ thông Dân tộc bán trú Trung học Cơ sở Trung Hà, nơi tác giả đang công tác, các đồng nghiệp, gia đình, bạn bè đã động viên giúp đỡ và tạo mọi điều kiện trong quá trình tác giả học tập và hoàn thành luận văn này.

Tuyên Quang, ngày 25.5.2016

Tác giả

Hoàng Minh Hiếu

Chương 1
Tổng quan về giả thuyết Erdös-Szekeres

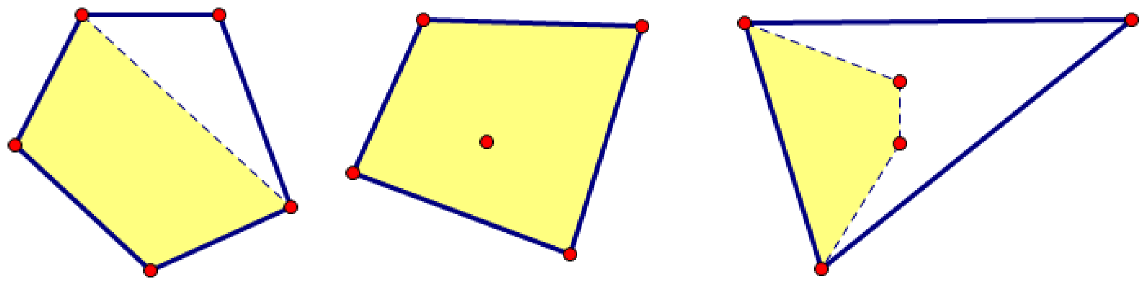
Cho X là tập hữu hạn các điểm trên mặt phẳng. Ta nói các điểm của X *ở vị trí tổng quát* (in general position) nếu trong X không có ba điểm nào thẳng hàng. Tập các điểm $Y \subseteq X$ được gọi là *ở vị trí lồi* (in convex position) nếu Y là các đỉnh của đa giác lồi. *Bao lồi* của tập X ($convX$) là tập lồi nhỏ nhất chứa X (là giao của tất cả các tập lồi chứa X).

Chương này trình bày tổng quan về giả thuyết Erdös-Szekeres và chứng minh công thức $\mathrm{ES}(n) = 2^{n-2} + 1$ với $n = 4,5$ với tập điểm bất kỳ ở vị trí tổng quát trong mặt phẳng.

1.1. Giả thuyết Erdös-Szekeres

Năm 1932, bằng cách lấy bao lồi của năm điểm, Esther Klein đã chứng minh một nhận xét đơn giản sau đây.

Định lí 1.1 (E. Klein, 1932) *Với năm điểm bất kì cho trước trên mặt phẳng ở vị trí tổng quát* (*không có ba điểm nào thẳng hàng*)*, bao giờ ta cũng tìm được bốn điểm tạo thành tứ giác lồi.*



1a) **1b)** **1c)**

Hình 1.1: Mọi tập năm điểm ở vị trí tổng quát luôn tồn tại bốn điểm là đỉnh của một tứ giác lồi

Chỉ có ba trường hợp bao lồi của năm điểm như trên Hình 1.1. Cả ba trường hợp đều có tứ giác lồi.

Trường hợp thứ nhất (Hình 1a) Bao lồi của năm điểm là một ngũ giác *ABCDE*. Khi ấy mọi bộ bốn điểm từ năm điểm ấy đều tạo thành tứ giác lồi (và điểm còn lại nằm ngoài tứ giác lồi đó). Trong trường hợp này ta có tất cả $C_5^4 = 5$ tứ giác lồi. Đó chính là các tứ giác *ABCD, ABCE, ABDE, ACDE, BCDE*. Tất cả các tứ giác này đều không chứa điểm còn lại (điểm thứ năm nằm bên ngoài tứ giác). Ta gọi các tứ giác lồi này là *tứ giác lồi rỗng*.

Ngoài ra, ta có tất cả $C_5^3 = 10$ tam giác được tạo thành từ năm điểm *A, B, C, D, E* (*ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE*). Và tất cả các tam giác này đều là các tam giác rỗng.

Trường hợp thứ hai (Hình 1b) Bao lồi là một tứ giác chứa một điểm còn lại ở bên trong. Trong trường hợp này ta có một tứ giác lồi (kí hiệu là *ABCD*) chứa một điểm *E* ở bên trong. Tứ giác *ABCD* (chỉ chứa đúng một điểm *E* ở bên trong) được gọi là *tứ giác gần rỗng*. Vì không có ba điểm nào thẳng hàng nên *E* phải nằm về cùng phía với *B* (hoặc với *D*) của đường thẳng *AC*. Do đó ta có tứ giác *AECD* (hoặc *ABCE*) là tứ giác lồi rỗng, còn tứ giác *ABCE* (hoặc tương ứng *AECD*) là tứ giác lõm. Tương tự, điểm *E* phải nằm cùng phía với *A* (hoặc với *C*) của đường chéo *BD*. Khi ấy tứ giác *BEDC* (hoặc tứ giác *ABED*) là tứ giác lồi rỗng và tứ giác *ABED* (hoặc tứ giác *BCDE*) là tứ giác lõm. Như vậy, trong Trường hợp 2 ta có hai tứ giác lồi rỗng, một tứ giác lồi gần rỗng và hai tứ giác lõm.

Ngoài ra, trong trường hợp này, ta có tất cả 10 tam giác được tạo thành từ năm điểm *A, B, C, D, E*. Đó là các tam giác: *ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE*. Trong đó tất cả 6 tam giác có đỉnh *E* đều là tam giác rỗng (không chứa hai điểm còn lại bên trong). Vì khi kẻ đường chéo *AC* (hoặc *BD*) của tứ giác lồi *ABCD* thì do các điểm không thẳng hàng