ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

LƯƠNG THỊ ÁNH DƯƠNG

MỘT PHƯƠNG PHÁP TÁCH CHO BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN ĐƠN ĐIỆU

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

LƯƠNG THỊ ÁNH DƯƠNG

MỘT PHƯƠNG PHÁP TÁCH CHO BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN ĐƠN ĐIỆU

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 60 46 01 12

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

GS.TSKH. LÊ DŨNG MƯU

Thái Nguyên - 2016

Mục lục

Lời nói đầu

Bất đẳng thức biến phân đơn điệu là lớp bài toán nảy sinh từ nhiều vấn đề của toán học ứng dụng như phương trình vi phân, các bài toán vật lý, toán tối ưu hóa. Bài toán bất đẳng thức biến phân đơn điệu có nhiều ứng dụng trong thực tế: trong y học, cân bằng giao thông đô thị, mô hình cân bằng kinh tế… Vì thế, tôi nghiên cứu đề tài này với mục đích tổng hợp lại các kiến thức cơ bản về bài toán bất đẳng thức biến phân và bất đẳng thức biến phân tách. Sau đó giới thiệu một phương pháp tách giải bài toán bất đẳng thức biến phân.

Nội dung của luận văn được trình bày trong hai chương

- Chương 1 giới thiệu bài toán bất đẳng thức biến phân đơn điệu, tổng hợp kiến thức về không gian Hilbert, tập lồi, hàm lồi.
- Chương 2 sẽ trình bày một vài thuật toán cơ bản và tập trung vào một thuật toán tách.

Luận văn này được thực hiện tại Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên và hoàn thành với sự hướng dẫn của GS.TSKH. Lê Dũng Mưu (Viện Toán học - Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam). Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới người hướng dẫn khoa học của mình, người đã đặt vấn đề nghiên cứu, dành nhiều thời gian hướng dẫn và tận tình giải đáp những thắc mắc của tác giả trong suốt quá trình làm luận văn.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn Ban Giám hiệu Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, Ban Chủ nhiệm Khoa Toán–Tin, cùng các giảng viên đã tham gia giảng dạy, đã tạo mọi điều kiện tốt nhất để tác giả học tập và nghiên cứu.

Tác giả muốn gửi những lời cảm ơn tốt đẹp nhất tới tập thể Lớp B, cao học Toán khóa 8 (2014-2016) đã động viên và giúp đỡ tác giả rất nhiều trong suốt quá trình học tập.

Nhân dịp này, tác giả cũng xin chân thành cảm ơn Sở Giáo dục và Đào tạo Hải Phòng, Ban Giám hiệu và các đồng nghiệp ở Trường THCS Vạn Sơn, Quận Đồ Sơn, Thành phố Hải Phòng đã tạo điều kiện cho tác giả hoàn thành tốt nhiệm vụ học tập và công tác của mình.

Thái Nguyên, ngày 20 tháng 5 năm 2016

Tác giả

Lương Thị Ánh Dương

Chương 1

Bài toán bất đẳng thức biến phân đơn điệu

Trong chương này, chúng ta sẽ nhắc lại kiến thức về không gian Hilbert và giải tích lồi. Nội dung trong chương được trích dẫn chủ yếu từ tài liệu tham khảo [1] và [2].

1.1 Tập lồi, hàm lồi

1.1.1 Không gian Hilbert

Định nghĩa 1.1.1. Cho không gian vector $\mathscr{H}$ trên trường số K ($K = \mathbb{R}$ hoặc $K = \mathbb{C}$). Một ánh xạ từ $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$ vào K xác định bởi $(x,y) \mapsto \langle x, y\rangle$ được gọi là một *tích vô hướng* trên $\mathscr{H}$ nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau:

(a) $\langle x,x\rangle \geq 0$ với mọi $x \in \mathscr{H}$,
$\langle x,x\rangle = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$;

(b) $\langle y,x\rangle = \overline{\langle x,y\rangle}$ với mọi $x, y \in \mathscr{H}$;

(c) $\langle x+x', y\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x',y\rangle$ với mọi $x, x', y \in \mathscr{H}$;

(d) $\langle \lambda x,y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle$ với mọi $x, y \in \mathscr{H}$ và mọi $\lambda \in \mathscr{H}$.

Định nghĩa 1.1.2. Nếu $\langle \cdot,\cdot\rangle$ là một tích vô hướng trên $\mathscr{H}$ thì cặp $(\mathscr{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ được gọi là một *không gian tiền Hilbert*. Nếu không gian định chuẩn tương ứng đầy đủ thì ta nói $(\mathscr{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ là một *không gian Hilbert*.

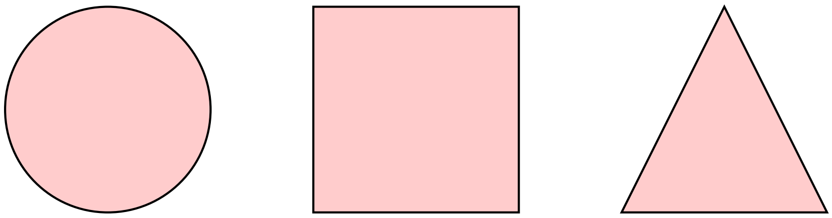
1.1.2 Tập lồi

Định nghĩa 1.1.3. Cho hai điểm $y, z \in \mathscr{H}$. Tất cả các điểm có dạng

$$x = \lambda y + (1-\lambda)z = z + \lambda(y-z) \quad \text{với mọi } 0 \leq \lambda \leq 1$$

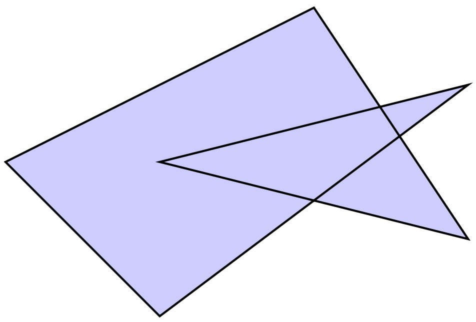
được gọi là một *đoạn thẳng* nối y và z, và được kí hiệu là $[y,z]$. Một tập $M \subseteq \mathscr{H}$ được gọi là *tập lồi* nếu với mọi $y, z \in \mathscr{H}$ ta có $[y,z] \subset \mathscr{H}$.

Ví dụ 1.1.4. Hình tròn, hình vuông, hình tam giác (bao gồm cả miền trong), là các tập lồi trong mặt phẳng.



Hình 1.1: Tập lồi

Hình sau đây cho một ví dụ về tập không lồi



Hình 1.2: Tập không lồi

Ta có các tính chất sau đây đối với các tập lồi:

Tính chất 1.1.1.

(1) Giao của một họ bất kỳ các tập lồi là tập lồi.

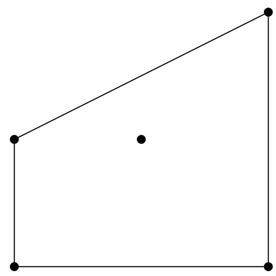
(2) Một tập $M \subset \mathscr{H}$ là lồi khi và chỉ khi nó chứa tất cả các tổ hợp lồi của những phần tử thuộc nó.

(3) Nếu A, B và C là các tập lồi, $\alpha \in \mathscr{H}$ thì các tập $A+B$, αA và $A \times C$ là các tập lồi.

(4) Bao lồi của tập $A \subset \mathscr{H}$, kí hiệu co$A$, là giao của tất cả các tập lồi chứa A. Tức là

$$\mathrm{co}A = \left\{ x \mid x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i,\, \lambda_i > 0,\, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Có thể chứng minh rằng co$A$ là một tập lồi và là tập lồi bé nhất chứa tập hợp A.



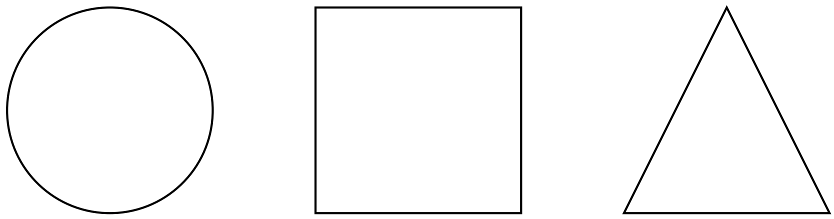
Hình 1.3: Bao lồi của một tập hợp

(5) Một tập lồi đóng khác rỗng $M \subset \mathscr{H}$ có điểm cực biên (thường gọi là *đỉnh*) khi và chỉ khi nó không chứa trọn một đường thẳng nào. Một tập lồi đóng, bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ là bao lồi các điểm cực biên của nó.

Một ví dụ đơn giản là, hình tam giác và hình vuông (chữ nhật) có lần lượt ba và bốn điểm cực biên là các đỉnh của chúng. Hình tròn có vô số điểm cực biên, tập hợp các điểm cực biên này là đường tròn tương ứng.

Định nghĩa 1.1.5. Giả sử $M \subset \mathscr{H}$ (M là một không gian con đóng của $\mathscr{H}$), với mỗi $x \in \mathscr{H}$ có thể biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng

$$x = y + z \quad \text{trong đó } y \in M, z \in M^{\perp}.$$



Hình 1.4: Điểm cực biên

Với biểu diễn này, xét toán tử P như sau Xét toán tử

$$P : \mathscr{H} \to \mathscr{H}, \quad P(x) = y.$$

Dễ thấy P là một toán tử tuyến tính. Ta gọi nó là *toán tử chiếu* từ $\mathscr{H}$ lên không gian con đóng M.

Kí hiệu I là toán tử đồng nhất trên $\mathscr{H}$ ta có

$$z = x - y = x - P(x) = (I - P)x$$

nên $I - P$ là toán tử chiếu từ $\mathscr{H}$ lên M. Với mọi $x \in \mathscr{H}$ có

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 \quad \text{do } y \perp z.$$

Như vậy $\|Px\| = \|y\| \le \|x\|$ nghĩa là P liên tục và $\|P\| \le 1$. Nếu $M \neq \{0\}$ ta lấy $y \in M$ thì $\|Py\| = \|y\|$ nên $\|P\| \ge 1$. Vậy $\|P\| = 1$.

Mệnh đề 1.1.6. *Toán tử chiếu P từ $\mathscr{H}$ lên không gian con đóng M là toán tử tự liên hợp và thỏa mãn đẳng thức $P^2 = P$.*

Định nghĩa 1.1.7. Cho $C \neq \varnothing$ là tập lồi đóng thuộc không gian $\mathscr{H}$ và $y \in \mathscr{H}$. Đặt

$$d_C(y) = \inf \|x - y\| \quad \text{với mọi } x \in C$$

Ta nói $d_C(y)$ là *khoảng cách* từ y đến C. Nếu tồn tại $\pi \in C$ sao cho $d_C(y) = \|\pi - y\|$, thì ta nói π là *hình chiếu* (hay *khoảng cách*) của y trên C, và được kí hiệu là $\pi = P_C(y)$.

Chú ý rằng nếu $C \neq \varnothing$ thì $d_C(y)$ hữu hạn và

$$0 \leq d_C(y) \leq \|x-y\|, \quad \text{với mọi } x \in C.$$

Theo định nghĩa ta thấy $P_C(y)$ là nghiệm của bài toán tối ưu

$$\min\left\{\frac{1}{2}\|x-y\|^2 \mid x \in C\right\}.$$

Nói cách khác việc tìm hình chiếu của y trên C có thể đưa về tìm cực tiểu của hàm toàn phương $\|x-y\|^2$ trên C.

Mệnh đề 1.1.8. *Cho $C \subset \mathscr{H}$ là một tập lồi đóng khác rỗng. Khi đó, với mọi $y \in \mathscr{H}$ và $\pi \in C$, hai tính chất sau là tương đương*

(1) $\pi = p_C(y)$;

(2) $y - \pi \in N_C(\pi)$, *trong đó*

$$N_C(\pi) = \{y \in \mathscr{H}, \langle y, x-\pi\rangle \leq 0, \forall x \in C\},$$

nón pháp tuyến ngoài tại π.

Mệnh đề 1.1.9. *Cho $C \subset \mathscr{H}$ là một tập lồi đóng khác rỗng. Khi đó, mọi $y \in \mathscr{H}$, hình chiếu $p_C(y)$ của y trên C luôn tồn tại và duy nhất.*

Mệnh đề 1.1.10. *Cho $C \subset \mathscr{H}$ là một tập lồi đóng khác rỗng. Khi đó nếu $y \notin C$ thì*

$$\langle p_C(y) - y, x - p_C(y)\rangle \geq 0, \quad \text{với mọi } x \in C$$

và

$$\langle p_C(y) - y, y - p_C(y)\rangle < 0.$$

Mệnh đề 1.1.11. *Cho $C \subset \mathscr{H}$ lồi khác rỗng. Khi đó ánh xạ $y \mapsto p_C(y)$ có các tính chất sau.*

(1) *Tính không giãn:* $\|p_C(x) - p_C(y)\| \leq \|x-y\|$ *với mọi x và mọi y.*