ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN ĐỖ QUỲNH TRANG

THUẬT TOÁN TÌM NGHIỆM HỮU HIỆU CỦA BÀI TOÁN TỐI ƯU HAI CẤP TUYẾN TÍNH ĐA MỤC TIÊU

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN ĐỖ QUỲNH TRANG

THUẬT TOÁN TÌM NGHIỆM HỮU HIỆU CỦA BÀI TOÁN TỐI ƯU HAI CẤP TUYẾN TÍNH ĐA MỤC TIÊU

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành :Toán ứng dụng
Mã số : 60 46 01 12

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
GS.TS. Trần Vũ Thiệu

THÁI NGUYÊN - 2016

Mục lục

Mở đầu

Bài toán tối ưu hai cấp có thể hiểu đơn giản là bài toán tối ưu mà trong ràng buộc của nó lại là một bài toán tối ưu khác. Bài toán tối ưu hai cấp xuất hiện trên sách báo, tạp chí có liên quan tới các hệ thống phân cấp, bài toán hai cấp nảy sinh từ nhiều ứng dụng đa dạng chẳng hạn trong hoạt động vận tải, kinh tế, sinh thái học, kỹ thuật, ...

Khi các hàm mục tiêu và các hàm ràng buộc trong bài toán là các hàm tuyến tính, thì ta có bài toán tối ưu hai cấp tuyến tính. Chúng được phân ra thành: bài toán một mục tiêu (được nghiên cứu và ứng dụng nhiều hơn), bài toán đa mục tiêu (khó ứng dụng hơn do ít có thuật toán hiệu quả) và bài toán tối ưu trên tập Pareto là trường hợp riêng biệt.

Tối ưu hai cấp thuộc lớp các bài toán tối ưu toàn cục, nói chung rất phức tạp và khó giải. Nói riêng nó bao hàm bài toán tối ưu trên tập Pareto như một trường hợp cụ thể. Nhiều phương pháp đã được đề xuất, tuy nhiên hiệu quả không cao và chủ yếu đối với các bài toán tuyến tính hai cấp với một hay nhiều mục tiêu.

Bài toán tối ưu hai cấp có một số dạng chính sau:

- *Bài toán tối ưu hai cấp* một mục tiêu (Bilevel Programming Problem - BPP)

$$\min_{x\in X} F(x,y) \quad \text{với} \quad \begin{cases} G(x) \leqslant 0, \\ y \text{ nghiệm đúng } \begin{cases} \min_{y\in Y} f(x,y) \\ \text{với } g(x,y) \leqslant 0. \end{cases} \end{cases} \tag{BPP}$$

  với $x \in X \subset \mathbb{R}^n$, $y \in Y \subset \mathbb{R}^m$ và $F, f\colon X\times Y \to \mathbb{R}$ lần lượt là *hàm mục tiêu* của bài toán ngoài (bài toán cấp trên) và bài toán trong (bài toán cấp dưới), $G\colon X \to \mathbb{R}$, $g\colon X\times Y \to \mathbb{R}$ là các *hàm ràng buộc*.

Khi F, f và G, g tuyến tính, bài toán gọi là *bài toán tối ưu tuyến tính hai cấp* (Bilevel Linear Programming Problem - BLPP) hay *trò chơi Stackelberg tuyến tính* (Linear Stackelberg Game - LSG).

- *Bài toán tối ưu đa mục tiêu hai cấp* (Bilevel Multi-Objective Programming Problem - BMPP): Nếu F và f là các véctơ hàm (hàm giá trị véctơ), tức là

$$F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p \quad \text{và} \quad f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^q$$

Bài toán tối ưu đa mục tiêu hai cấp (BMPP) được viết như sau

$$\min_{x\in X} F(x,y) = \min_{x\in X} \Big(F_1(x,y), \cdots, F_p(x,y)\Big) \quad \text{với}$$
$$\begin{cases} G(x) \leqslant 0, \quad x \in X \\ y \text{ nghiệm đúng } \begin{cases} \min\limits_{y\in Y} f(x,y) = \min\limits_{y\in Y} \Big(f_1(x,y), \cdots, f_q(x,y)\Big) \\ \text{với } g(x,y) \leqslant 0, \quad y \in Y. \end{cases} \end{cases} \quad \text{(BMPP)}$$

Khi F, f, G, g là các ánh xạ tuyến tính thì ta có bài toán tối ưu tuyến tính hai cấp đa mục tiêu. Bài toán này bao gồm trường hợp riêng là bài toán tối ưu trên tập nghiệm hữu hiệu.

Đề tài luận văn *"Thuật toán tìm nghiệm hữu hiệu của bài toán tối ưu hai cấp tuyến tính đa mục tiêu"* có mục đích tìm hiểu và trình bày một số kết quả lý thuyết liên quan tới bài toán tối ưu hai cấp đa mục tiêu và giới thiệu thuật toán tìm nghiệm hữu hiệu của bài toán tối ưu hai cấp tuyến tính đa mục tiêu (khái niệm min được hiểu theo nghĩa Pareto sẽ được định nghĩa ở phần sau). Luận văn được viết dựa trên các tài liệu tham khảo [1]-[6] hiện có và chủ yếu nhằm giới thiệu thuật toán được đưa ra ở hai tài liệu [5] và [6]. Nội dung luận văn gồm hai chương:

- *Chương 1. Kiến thức chuẩn bị về tối ưu đa mục tiêu.* Chương này nhắc lại một số khái niệm về tập lồi và tập lồi đa diện (đỉnh, cạnh và diện của tập lồi đa diện), khái niệm nghiệm hữu hiệu (điểm tối ưu Pareto) của bài toán tối ưu tuyến tính đa mục tiêu, tính chất tập nghiệm hữu hiệu và giới thiệu thuật toán tìm các nghiệm hữu hiệu của bài toán.

- *Chương 2. Bài toán tối ưu hai cấp tuyến tính đa mục tiêu* có nội dung:
  - Phát biểu bài toán tối ưu hai cấp tuyến tính đa mục tiêu.
  - Khái niệm nghiệm hữu hiệu.
  - Tính chất nghiệm hữu hiệu của bài toán.
  - Thuật toán tìm các nghiệm hữu hiệu của bài toán.

Do thời gian có hạn nên luận văn này chủ yếu chỉ dừng lại ở việc tìm hiểu, tập hợp tài liệu, sắp xếp và trình bày các kết quả nghiên cứu đã có theo chủ đề đặt ra. Trong quá trình viết luận văn cũng như trong soạn thảo văn bản chắc chắn không tránh khỏi có những sai sót nhất định. Tác giả luận văn rất mong nhận được sự góp ý của các thầy cô và các bạn đồng nghiệp để luận văn được hoàn thiện hơn.

Nhân dịp này, tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy hướng dẫn GS.TS. Trần Vũ Thiệu đã tận tình giúp đỡ trong suốt quá trình làm luận văn. Tác giả cũng xin chân thành cảm ơn các GS, PGS, TS của Khoa Toán-Tin, Trường Đại học Khoa học Thái Nguyên và của Viện Toán học đã giảng dạy và tạo mọi điều kiện thuận lợi trong quá trình tác giả học tập và nghiên cứu.

Thái Nguyên, ngày 20 tháng 5 năm 2015

Tác giả

Nguyễn Đỗ Quỳnh Trang

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị về tối ưu đa mục tiêu

Chương này nhắc lại một số kiến thức về tập lồi đa diện, khái niệm nghiệm hữu hiệu (điểm tối ưu Pareto) của bài toán tối ưu tuyến tính đa mục tiêu và giới thiệu cách tìm các đỉnh và cạnh hữu hiệu của bài toán, dựa trên phương pháp nón pháp tuyến. Nội dung của chương được tham khảo từ các tài liệu [1], [4] và [6].

1.1 Tập lồi đa diện

Trước hết ta nêu lại một số khái niệm có liên quan.

Định nghĩa 1.1.1 (Tập afin)**.** Tập $M \subseteq \mathbb{R}^n$ được gọi là một *tập afin* nếu có

$$\lambda a + (1-\lambda)b \in M \quad \text{với mọi } a, b \in M \ \text{ và mọi } \lambda \in \mathbb{R},$$

tức là nếu M chứa hai điểm nào đó thì M chứa cả đường thẳng đi qua hai điểm ấy.

Định nghĩa 1.1.2. *Bao afin* của một tập $E \subset \mathbb{R}^n$ là giao của tất cả các tập afin chứa E, ký hiệu $\operatorname{aff}(E)$. Đó là tập afin nhỏ nhất chứa E.

Định nghĩa 1.1.3. *Thứ nguyên* (hay *số chiều*) của một tập afin M được định nghĩa bằng số chiều của không gian con song song với M.

Định nghĩa 1.1.4 (Tập lồi)**.** Tập $C \subseteq \mathbb{R}^n$ được gọi là một *tập lồi* nếu với mọi $x^1, x^2 \in C$ và mọi $\lambda \in [0,1]$ ta có $\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in C$. *Thứ nguyên* của tập lồi C, ký hiệu $\dim C$, được định nghĩa bằng thứ nguyên của $\operatorname{aff} C$ (bao afin của C).

Bổ đề 1.1.5. *Giao của một họ bất kỳ các tập lồi trong $\mathbb{R}^n$ là một tập lồi.*

Định nghĩa 1.1.6 (Siêu phẳng)**.** Cho véctơ $a \in \mathbb{R}^n$ ($a \neq 0$) và số $b \in \mathbb{R}$. Tập

$$H = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b\right\}$$

gọi là một *siêu phẳng* trong $\mathbb{R}^n$. Đó là tập nghiệm của một phương trình tuyến tính trong $\mathbb{R}^n$.

Ví dụ 1.1.7. Trong không gian 3 chiều $\mathbb{R}^3$, phương trình $ax + by + cz = d$, với a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ không cùng bằng 0, xác định một siêu phẳng (mặt phẳng) trong $\mathbb{R}^3$.

Định nghĩa 1.1.8. Cho véctơ $a \in \mathbb{R}^n$ ($a \neq 0$) và số $b \in \mathbb{R}$. Khi đó, các tập

$$H_1 = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \leq b\right\},$$
$$H_1 = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \geq b\right\},$$

gọi là các *nửa không gian đóng*, xác định bởi siêu phẳng $a^T x = b$.

Ví dụ 1.1.9. Trong mặt phẳng $\mathbb{R}^2$, Siêu phẳng $x_1 + x_2 = 2$ tạo ra hai nửa không gian (nửa mặt phẳng) đóng

$$H_1 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 \leq 2\right\} \quad \text{và} \quad H_2 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 \geq 2\right\}$$

Bổ đề 1.1.10. *Mọi siêu phẳng và nửa không gian đóng là các tập lồi.*

Định nghĩa 1.1.11 (Tập da diện)**.** Nếu $P \subseteq \mathbb{R}^n$ là giao của một số hữu hạn các nửa không gian đóng thì P được gọi là một *tập đa diện*. Một cách hình thức, cho $a^1, \ldots, a^m \in \mathbb{R}^n$ là tập hữu hạn các véctơ cột và $b_1, \ldots, b_m$ là các hằng số. Xét các nửa không gian đóng $H_i = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \left\langle a^i, x\right\rangle \geq b_i\right\}$. Khi đó, $P = \bigcap\limits_{i=1}^{m} H_i$ là một tập đa diện. Mỗi bất phương trình $\left\langle a^i, x\right\rangle \geq b_i$ gọi là một *ràng buộc* cuả P. Ta nói điểm $x^0 \in P$ *thỏa mãn chặt* ràng buộc i^* nếu $\left\langle a^{i^*}, x\right\rangle \geq b_{i^*}$.

Bổ đề 1.1.12. *Tập đa diện là một tập lồi.*

Một tập đa diện có thể không bị chặn. Một tập đa diện bị chặn còn được gọi là một *đa diện lồi*. Các đa giác lồi theo nghĩa thông thường trong mặt phẳng (tam giác, hình chữ nhật, hình thang, ...) là những ví dụ cụ thể về đa diện lồi.

Định nghĩa 1.1.13 (Đường thẳng)**.** Cho hai véctơ $x^0, d \in \mathbb{R}^n$ $(d \neq 0)$. *Đường thẳng* đi qua x^0 theo phương d là tập các điểm $x(\lambda) = x^0 + \lambda d$ với $\lambda \in \mathbb{R}$. Véctơ d gọi là *véctơ chỉ phương* của đường thẳng.

Định nghĩa 1.1.14 (Tia)**.** Cho điểm $x^0 \in \mathbb{R}^n$ và véctơ chỉ phương $d \in \mathbb{R}^n$ $(d \neq 0)$. *Tia* đi từ x^0 theo hướng d là tập điểm $\Gamma = \left\{x \mid x = x^0 + \lambda d,\ \lambda \geq 0\right\}$..

Định nghĩa 1.1.15 (Nón lồi)**.** Cho tập lồi $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Khi đó, K là một *nón lồi* nếu với mọi $x \in K$ và mọi $\lambda > 0$, ta có $\lambda x \in K$. Một tập lồi đa diện mà đồng thời là một nón lồi gọi là một *nón lồi đa diện.*

Định nghĩa 1.1.16 (Hướng lùi xa)**.** Cho một tập lồi $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Véctơ $d \in \mathbb{R}^n$, $d \neq 0$ gọi là một *hướng lùi xa* của C nếu

$$\left\{x \mid x = x^0 + \lambda d,\ \lambda \geq 0\right\} \subseteq C \quad \text{với mọi } x^0 \in C.$$

Có quan hệ đáng chú ý sau giữa ma trận A xác định P và hướng lùi xa của P.

Định lí 1.1.17. *Giả sử $P \subseteq \mathbb{R}^n$ là một tập đa diện xác định bởi*

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b, x \geq 0\}.$$

Khi đó, d là một hướng lùi xa của P khi và chỉ khi

$$Ad \geq 0, d \geq 0, d \neq 0.$$

Hệ quả 1.1.18. *Nếu $P_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$. Khi đó, d là một hướng lùi xa của P khi và chỉ khi $Ad = 0$, $d \geq 0$, $d \neq 0$.*

Định nghĩa 1.1.19 (Nón lùi xa)**.** Nón lồi tạo nên bởi tập tất cả các hướng lùi xa của một tập lồi C và véctơ 0 gọi là *nón lùi xa* của C, ký hiệu $\operatorname{rec} C$.

Ví dụ 1.1.20. Với các tập đa diện P và P_0 vừa xét ở trên thì

$$\operatorname{rec} P = \{d \in \mathbb{R}^n : Ad \geq 0, d \geq 0\} \qquad \text{và} \qquad \operatorname{rec} P_0 = \{d \in \mathbb{R}^n : Ad = 0, d \geq 0\}.$$

Định lí 1.1.21. *Tập đa diện P không bị chặn khi và chỉ khi* $\operatorname{rec} P \neq \{0\}$.

Định nghĩa 1.1.22 (Diện của tập lồi)**.** Một tập con lồi F của một tập lồi C gọi là một *diện* (*face*) của C nếu $x, y \in C$ mà $\lambda x + (1-\lambda)y \in F$, với một $\lambda \in (0,1)$ thì $[x,y] \subseteq F$, nghĩa là một đoạn thẳng bất kỳ thuộc C mà có một điểm bên trong nó thuộc F thì cả đoạn thẳng ấy phải nằm trọn trong F.

Một diện của C, khác rỗng và khác C, gọi là *một diện thực sự* của C. Ví dụ, các diện thực sự của khối lập phương trong $\mathbb{R}^3$ là 8 đỉnh, 12 cạnh và 6 mặt của nó.

Định nghĩa 1.1.23 (Điểm cực biên)**.** Một diện có thứ nguyên (số chiều) 0 gọi là một *điểm cực biên* của C. Nói cách khác, $x^0 \in C$ là một điểm cực biên của C nếu không tồn tại $x^1, x^2 \in C$, $x^1 \neq x^0$ hoặc $x^2 \neq x^0$ sao cho $x^0 = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2$ với $\lambda \in (0,1)$. Điểm cực biên của tập đa diện P gọi là một *đỉnh* của P.

Định nghĩa 1.1.24 (Đỉnh suy biến)**.** Cho tập đa diện $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\}$. Giả sử x^0 là một đỉnh của P. Nếu x^0 thỏa mãn chặt (với dấu bằng) đúng n ràng buộc xác định P thì x^0 gọi là một *đỉnh không suy biến*, trái lại (x^0 thỏa mãn chặt nhiều hơn n ràng buộc) thì x^0 gọi là một *đỉnh suy biến*.

Cho tập đa diện $P \neq \varnothing$ xác định bởi hệ bất phương trình tuyến tính

$$\left\langle a^i, x \right\rangle \geq bi, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Với $x \in P$, ký hiệu $I(x) = \left\{ i : \left\langle a^i, x \right\rangle = bi \right\}$ là tập chỉ số những ràng buộc mà x thỏa mãn chặt. Đặt $I_0 = \left\{ i : \left\langle a^i, x \right\rangle = b_i \text{ với } x \in P \right\}$. Tính chất đặc trưng của các diện (nói riêng, các đỉnh và cạnh) của P được cho trong định lý sau.

Định lí 1.1.25 (Diện của tập đa diện)**.** *Một tập con lồi khác rỗng $F \subset P$ là một diện thực sự của P khi và chỉ khi*

$$F = \left\{ x : \left\langle a^i, x \right\rangle = b_i,\, i \in I, \quad \left\langle a^i, x \right\rangle \geq b_i,\, i \notin I \right\}$$

với I là tập chỉ số sao cho $I_0 \subset I \subset \{1, \ldots, m\}$ (I gọi là tập chỉ số xác định diện F). Hơn nữa, ta có $\dim F = n - \operatorname{rank}\{a^i : i \in I\}$ *và* $\dim P = n - \operatorname{rank}\{a^i : i \in I_0\}$.