ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

Nguyễn Thị Thanh Thúy

CÁT TUYẾN TRONG TAM GIÁC VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

Nguyễn Thị Thanh Thúy

CÁT TUYẾN TRONG TAM GIÁC VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

Chuyên ngành: Phương pháp toán sơ cấp
Mã số: 60460113

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
PGS.TS NGUYỄN VIỆT HẢI

Thái Nguyên - 2016

Mục lục

Lời mở đầu

Trong hình học phổ thông ta đã biết các đường thẳng của tam giác như đường cao, trung tuyến, đường phân giác,...thêm nữa là đường thẳng Euler, đường thẳng Simson. Luận văn này muốn nghiên cứu một cách hệ thống các cát tuyến đặc biệt trong tam giác, các tính chất có ích để hiểu biết hơn về tam giác. Ngoài ra luận văn cũng đề cập đến nhiều các ứng dụng, các bài toán nảy sinh khi nghiên cứu các cát tuyến trong tam giác.

Mục đích của đề tài là

1. Trình bày các cát tuyến Céva, tức các bộ ba đường thẳng đi qua đỉnh và đồng qui và một số cát tuyến đặc biệt của tam giác.

2. Từ các khái niệm, tính chất của các cát tuyến xây dựng được các hệ thức liên quan trong tam giác, đây là những hệ thức ít được trình bày chi tiết trong các sách giáo khoa Hình học hoặc giáo trình Hình học sơ cấp.

3. Ứng dụng được các khái niệm, tính chất, hệ thức thu được để hiểu biết thêm về Hình học tam giác và giải các bài toán thi học sinh giỏi quốc gia và quốc tế. Nhiều phần còn có ý tưởng sáng tạo các bài toán mới.

Phạm vi của đề tài là phát triển kiến thức hình học phẳng trong Hình học sơ cấp, đặc biệt chú ý đến các bài toán thi học sinh giỏi, thi Olympic trong nước và Quốc tế, các bài thi vào Trung học phổ thông chuyên và các đề thi Đại học. Ngoài phần mở đầu và danh mục tài liệu tham khảo nội dung luận văn được chia làm hai chương.

Chương 1 dành để trình bày những kết quả của Hình học sơ cấp nói chung, chủ yếu là các định lý: Menélaus, Céva, các hệ quả, các tính chất chung của cát tuyến trong tam giác. Nội dung ứng dụng của các đường thẳng Céva cũng được trình bày song song với nội dung lý thuyết.

Chương 2 với tiêu đề "Các đường thẳng Céva đặc biệt" trình bày chi tiết về các đường đối trung, đường thẳng đẳng giác, đường đối phân giác và đường thẳng bậc n.

Mỗi chương đều có phần giới thiệu chung về lý thuyết cần dùng đến trong chương. Nội dung nào đã có thì nêu tài liệu trích dẫn, nội dung nào mới thi được tác giả chứng minh chi tiết và chặt chẽ. Ý tưởng đó được tác giả lưu ý trong suốt luận văn.

Để hoàn thành được luận văn một cách hoàn chỉnh, tôi luôn nhận được sự hướng dẫn và giúp đỡ nhiệt tình của PGS.TS. Nguyễn Việt Hải, Giảng viên cao cấp Trường Đại Học Hải Phòng. Tôi xin chân thành bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy và xin gửi lời tri ân nhất của tôi đối với những điều thầy đã dành cho tôi.

Tôi xin chân thành cảm ơn ban lãnh đạo phòng Đào tạo sau đại học, quý thầy cô giảng dạy lớp Cao học K8B (2014 - 2016) Trường Đại Học Khoa Học - Đại Học Thái Nguyên đã tận tình truyền đạt những kiến thức quý báu cũng như tạo điều kiện cho tôi hoàn thành khóa học.

Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành nhất tới gia đình, bạn bè, những người đã luôn động viên, hỗ trợ và tạo mọi điều kiện cho tôi trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn.

Xin trân trọng cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 6 năm 2016

Học viên

Nguyễn Thị Thanh Thúy

Danh sách hình vẽ

Chương 1

Cát tuyến của tam giác

1.1 Khái niệm và các định lý cơ bản

Định nghĩa 1.1.1. Một đường thẳng cắt một hình gọi là cát tuyến của hình đó.

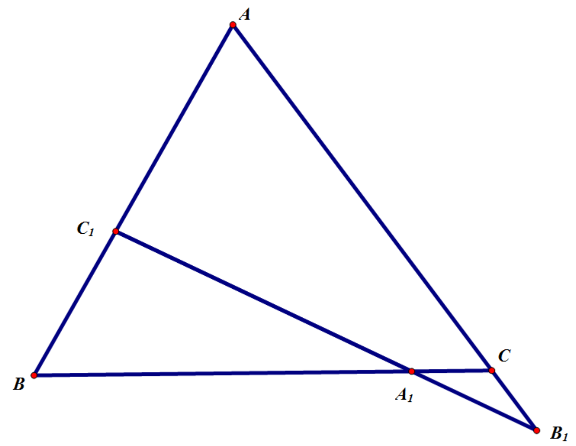
Nếu hình là một đa giác thì cát tuyến có thể cắt không những cạnh mà còn cả trên phần kéo dài của các cạnh.

Các định lý sau có thể coi là những tính chất đầu tiên của cát tuyến trong tam giác. Đã có rất nhiều phép chứng minh chúng, ở đây ta sẽ chọn phép chứng minh đơn giản nhất.

Định lý 1.1.2. (Định lý Menélaus, Menélaus-Nhà toán học cổ Hy lạp, Thế kỷ I sau công nguyên) *Nếu có một đường thẳng cắt các cạnh AB, BC, CA hay các cạnh kéo dài của một tam giác lần lượt ở các điểm C_1, B_1, A_1 thì*

$$\frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}}.\frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}}.\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} = 1.$$

Chứng minh. Giả sử có cát tuyến $C_1A_1B_1$ cắt các cạnh của ΔABC. Vẽ đường thẳng PQ bất kỳ và từ các đỉnh của tam giác vẽ các đường thẳng song song với cát tuyến $C_1A_1B_1$, cắt PQ tương ứng tại các điểm



Hình 1.1: Cát tuyến

A', B', C', gọi O là giao của (C_1B_1) với (PQ). Theo định lý các đoạn thẳng bị chắn bởi các đường thẳng song song

$$\frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}; \frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}}; \frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OC}}.$$

Sau khi nhân các đẳng thức trên vế với vế, ta có

$$\frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}} \cdot \frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} \cdot \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} \cdot \frac{\overline{OB}}{\overline{OC}} = 1.$$

□

Hệ thức Menélaus nói trên có thể viết dưới dạng tích các tỷ số đơn $(C_1AB).(B_1CA).(A_1BC) = 1$. Chú ý rằng, cát tuyến có thể cắt hoặc cả 3 cạnh kéo dài hoặc cắt hai cạnh và cạnh thứ ba kéo dài. Trong trường hợp thứ nhất, 3 tỷ số đều dương, trường hợp thứ hai, hai tỷ số âm và một tỷ số dương.

Định lý 1.1.3. (Định lý Menélaus đảo) *Nếu các điểm A_1, B_1, C_1 tương ứng nằm trên các cạnh BC, CA, AB sao cho*

$$(C_1AB).(B_1CA).(A_1BC) = 1$$

thì ba điểm đó thẳng hàng.