ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ VIỆT HÀ

HIỆU CHỈNH TIKHONOV CHO PHƯƠNG TRÌNH TOÁN TỬ ĐẶT KHÔNG CHỈNH: TỐC ĐỘ HỘI TỤ VÀ XẤP XỈ HỮU HẠN CHIỀU

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ VIỆT HÀ

HIỆU CHỈNH TIKHONOV CHO PHƯƠNG TRÌNH TOÁN TỬ ĐẶT KHÔNG CHỈNH: TỐC ĐỘ HỘI TỤ VÀ XẤP XỈ HỮU HẠN CHIỀU

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành :Toán ứng dụng
Mã số : 60 46 01 12

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
TS. Nguyễn Thị Thu Thủy
TS. Lâm Thùy Dương

THÁI NGUYÊN - 2016

Mục lục

Lời cảm ơn

Luận văn này được thực hiện tại Trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên và hoàn thành dưới sự hướng dẫn của TS. Nguyễn Thị Thu Thủy. Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới người hướng dẫn khoa học của mình, người đã đặt vấn đề nghiên cứu, dành nhiều thời gian hướng dẫn và tận tình giải đáp những thắc mắc của tác giả trong suốt quá trình làm luận văn.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn Ban Giám hiệu, Phòng Đào tạo, Ban chủ nhiệm Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên, cùng các giảng viên tham gia giảng dạy cao học Toán của trường Đại học Khoa học đã tạo mọi điều kiện tốt nhất để tác giả học tập và nghiên cứu.

Tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn tới tập thể lớp Cao học Toán K8A (khóa 2014–2016) đã luôn động viên và giúp đỡ tác giả rất nhiều trong quá trình học tập, nghiên cứu.

Nhân dịp này, tác giả cũng xin chân thành cảm ơn gia đình, bạn bè, lãnh đạo đơn vị công tác và đồng nghiệp đã luôn động viên, giúp đỡ và tạo điều kiện tốt nhất cho tôi trong quá trình học tập, nghiên cứu và làm luận văn.

Thái Nguyên, tháng 6 năm 2016

Tác giả

Nguyễn Thị Việt Hà

Bảng ký hiệu

$\mathbb{R}$	tập số thực
H	không gian Hilbert thực
X	không gian Banach
X^*	không gian đối ngẫu của X
C	tập con đóng lồi của H
A	toán tử đơn điệu trong không gian Hilbert
$\mathrm{dom}(A)$	miền hữu hiệu của toán tử A
$\langle x, y\rangle$	tích vô hướng của hai vectơ x và y
$\|x\|$	chuẩn của vectơ x
$x_n \to x$	x_n hội tụ mạnh đến x
$x_n \rightharpoonup x$	x_n hội tụ yếu x
I	ánh xạ đơn vị

Lời nói đầu

Đề tài luận văn nghiên cứu phương trình toán tử đơn điệu đặt không chỉnh trong không gian Hilbert H: Tìm phần tử $x_0 \in H$ thỏa mãn

$$A(x_0) = f \tag{1}$$

ở đây $A : \mathscr{D}(A) \subseteq H \to H$, $f \in H$, $\mathscr{D}(A)$ là ký hiệu tập xác định của toán tử A.

Ta xét phương trình toán tử (1) trong trường hợp f không được biết chính xác mà được cho xấp xỉ bởi f_δ, thỏa mãn

$$\|f - f_\delta\| \leq \delta, \quad \delta \to 0. \tag{2}$$

Nếu không có các điều kiện đặc biệt đặt lên toán tử A (chẳng hạn tính đơn điệu đều hoặc đơn điệu mạnh), thì phương trình toán tử (1), nói chung, là một bài toán đặt không chỉnh theo nghĩa Hadamard, nghĩa là bài toán (khi dữ kiện thay đổi nhỏ) hoặc không tồn tại nghiệm, hoặc nghiệm không duy nhất hoặc nghiệm không phụ thuộc liên tục vào dữ kiện ban đầu. Để giải loại bài toán này ta phải sử dụng các phương pháp giải ổn định sao cho khi sai số của dữ kiện càng nhỏ thì nghiệm xấp xỉ tìm được càng gần với nghiệm đúng của bài toán ban đầu. Những người có công đặt nền móng cho lý thuyết bài toán đặt không chỉnh là các nhà toán học A. N. Tikhonov [6], M.M. Lavrentiev [5] và V.K. Ivanov [4] vv.... Một trong những phương pháp được sử dụng rộng rãi và rất hiệu quả giải bài toán đặt không chỉnh là phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov. Kể từ năm 1963 khi A.N. Tikhonov [6] đưa ra phương pháp hiệu chỉnh nổi tiếng thì lý thuyết bài toán đặt không chỉnh được phát triển hết sức sôi động và có mặt ở hầu hết các bài toán thực tế.

Mục đích của đề tài luận văn là nghiên cứu phương pháp hiệu chỉnh phương trình toán tử đơn điệu (1) trong không gian Hilbert trong bài báo [3]. Cụ thể là nghiên cứu tốc độ hội tụ của nghiệm hiệu chỉnh phương trình toán tử (1) trong trường hợp toán tử A liên tục, đóng yếu, đơn điệu; đồng thời nghiên cứu tốc độ hội tụ và xấp xỉ hữu hạn chiều nghiệm hiệu chỉnh.

Nội dung của luận văn được trình bày trong hai chương. Chương 1: Giới thiệu về toán tử đơn điệu, phương trình toán tử đơn điệu đặt không chỉnh trong không gian Hilbert, không gian Banach và một số bài toán liên quan đến toán tử đơn điệu, đó là bài toán điểm bất động, bài toán cân bằng. Chương 2: Trình bày kết quả nghiên cứu trong [3] về phương pháp hiệu chỉnh phương trình toán tử đơn điệu, đánh giá tốc độ hội tụ của nghiệm hiệu chỉnh và xây dựng xấp xỉ hữu hạn chiều nghiệm hiệu chỉnh.

Chương 1

Phương trình toán tử

Chương này trình bày khái niệm về toán tử đơn điệu, phương trình toán tử đơn điệu đặt không chỉnh trong không gian Banach và không gian Hilbert; giới thiệu một số bài toán liên quan đến phương trình toán tử toán tử đơn điệu. Các kiến thức của chương này được tổng hợp từ các tài liệu [1]–[3].

1.1 Toán tử đơn điệu trong không gian Hilbert

1.1.1 Không gian Banach

Mục này trình bày khái niệm và một số kết quả về không gian Banach. Các kiến thức của mục này được tham khảo trong [2].

Định nghĩa 1.1.1. Cho tập hợp X. Ánh xạ $d : X \times X \to \mathbb{R}$ được gọi là một mêtric nếu nó thỏa mãn các tiên đề sau:

(i) $d(x,y) \geq 0$ với mọi $x,y \in X$; $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$ với mọi $x,y \in X$;

(iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ với mọi $x,y,z \in X$.

Tập X cùng với mêtric d xác định như trên được gọi là không gian mêtric, ký hiệu là (X,d).

Định nghĩa 1.1.2. Không gian mêtric (X,d) được gọi là không gian đầy đủ (hay không gian đầy) nếu mọi dãy Cauchy trong X đều hội tụ.

Định nghĩa 1.1.3. Cho không gian tuyến tính X trên trường số thực, ánh xạ $||.|| : X \to \mathbb{R}$ được gọi là chuẩn trên X nếu nó thỏa mãn các tiên đề sau:

(i) $||x|| \geq 0$ với mọi $x \in X$; $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(ii) $||kx|| = |k|.||x||$ với mọi $x \in X$, với mọi $k \in \mathbb{R}$;

(iii) $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$ với mọi $x, y \in X$.

Không gian tuyến tính X cùng với chuẩn $\|.\|$ xác định như trên được gọi là không gian định chuẩn, ký hiệu là $(X, ||.||)$.

Định nghĩa 1.1.4. Dãy $\{x_n\}$ trong không gian định chuẩn X được gọi là hội tụ yếu tới $x_0 \in X$, ký hiệu là $x_n \rightharpoonup x_0$ nếu với mọi $f \in X^*$-không gian liên hợp của X ta có $f(x_n) \to f(x_0)$ khi $n \to \infty$.

Nhận xét 1.1.5. Một dãy hội tụ mạnh thì hội tụ yếu, nhưng ngược lại thì chưa chắc đã đúng.

Ví dụ, trong không gian l_2 lấy dãy $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ sao cho $\langle e_i, e_j \rangle = 1$ khi $i = j$ và $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ khi $i \neq j$. Khi đó, với mọi $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots) \in l_2$ ta có $\langle e_j, \varphi \rangle = \varphi_j$. Vì $\varphi \in l_2$ nên $\lim\limits_{j \to \infty} \varphi_j = 0$, tức là dãy $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ hội tụ yếu đến phần tử 0. Nhưng dãy $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ không hội tụ mạnh. Thật vậy, do $\|e_i - e_j\| = \sqrt{2}$ nên dãy $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ không phải là dãy cơ bản, do đó không hội tụ mạnh.

Chú ý 1.1.6. Trong không gian định chuẩn X nếu dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh đến x_0 thì $x_n \rightharpoonup x_0$ và $\|x_n\| \to \|x_0\|$.

Định nghĩa 1.1.7. Toán tử A từ không gian định chuẩn X vào không gian định chuẩn Y là liên tục nếu với mọi dãy $\{x_n\} \subset X$ và $x_n \to x \in X$ thì $A(x_n) \to A(x)$.

Tính liên tục của toán tử tuyến tính A có thể được xác định bằng cách chỉ ra $A(x_n) \to 0$ với mọi dãy $\{x_n\} \subseteq X$ và $x_n \to 0$.