

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THU HẰNG

CÁC HỆ THỨC LIÊN QUAN ĐẾN
ĐIỂM VÀ ĐƯỜNG ĐẶC BIỆT
TRONG TAM GIÁC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THU HẰNG

**CÁC HỆ THỨC LIÊN QUAN ĐẾN
ĐIỂM VÀ ĐƯỜNG ĐẶC BIỆT
TRONG TAM GIÁC**

Chuyên ngành: Phương pháp toán sơ cấp
Mã số: 60460113

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
PGS.TS NGUYỄN VIỆT HẢI

Thái Nguyên - 2016

Mục lục

Danh sách hình vẽ	iii
Danh sách ký hiệu	iv
Mở đầu	1
1 Các điểm và đường đặc biệt trong tam giác	4
1.1 Các điểm đặc biệt loại một	4
1.1.1 Điểm Gergaune	6
1.1.2 Điểm Nagel	8
1.1.3 Điểm Lemoine	9
1.1.4 Tâm Euler	10
1.2 Các điểm đặc biệt loại hai	16
1.2.1 Điểm Schiffler	16
1.2.2 Điểm Engiabech	19
1.2.3 Điểm Feuerbach	24
1.2.4 Điểm Brocard	26
1.2.5 Điểm Fermat-Torricelli	30
2 Các hệ thức liên quan đến các điểm đặc biệt	35
2.1 Các hệ thức liên hệ giữa các điểm đặc biệt loại một	35
2.1.1 Phương pháp Van Aubel	36
2.1.2 Phương pháp Stewart	38
2.1.3 Phương pháp Leibnitz	41
2.1.4 Phương pháp véc tơ	45
2.1.5 Phương pháp tổ hợp các hệ thức	55

2.2	Một số hệ thức liên hệ giữa các điểm đặc biệt loại hai . . .	59
2.2.1	Hệ thức liên quan đến điểm Feuerbach	60
2.2.2	Hệ thức liên quan đến điểm Brocard	60
2.2.3	Hệ thức liên quan đến điểm Fermat-Torricelli . . .	62
2.3	Một số ứng dụng	63
2.3.1	Hình thành các bất đẳng thức trong tam giác . . .	63
2.3.2	Một số đánh giá liên quan đến R, r và p	66
2.3.3	Ứng dụng vào giải các bài toán đại số	67
	Kết luận	72
	Tài liệu tham khảo	73

DANH SÁCH HÌNH VẼ

Stt	Hình	Nội dung	Trang
1.	Hình 1.1	<i>Điểm Gergaune</i>	6
2.	Hình 1.2	<i>Điểm Nagel</i>	8
3.	Hình 1.3	<i>Tâm Euler</i>	11
4.	Hình 1.4	<i>Tính chất i. (Euler)</i>	12
5.	Hình 1.5	<i>Tính chất ii. (Euler)</i>	13
6.	Hình 1.6	<i>Tính chất iii. (Euler)</i>	13
7.	Hình 1.7	<i>Điểm Feuerbach</i>	14
8.	Hình 1.8	<i>Điểm Schiffler</i>	17
9.	Hình 1.9	<i>Tính chất 1.2.1.4</i>	19
10.	Hình 1.10	<i>Tính chất 1.2.2.2</i>	20
11.	Hình 1.11	<i>Tính chất 1.2.2.3</i>	21
12.	Hình 1.12	<i>Tính chất 1.2.2.6</i>	22
13.	Hình 1.13	<i>Chú ý</i>	23
14.	Hình 1.14	<i>Tính chất 1.2.3.2</i>	25
15.	Hình 1.15	<i>Điểm Brocard</i>	26
16.	Hình 1.16	<i>Tính góc Brocard</i>	30
17.	Hình 1.17	<i>Điểm Fermat – Torricelli</i>	32
18.	Hình 2.1	<i>Định lý Van Aubel</i>	37
19.	Hình 2.2	<i>Định lý Steiwart</i>	38
20.	Hình 2.3	<i>Khoảng cách OG</i>	39
21.	Hình 2.4	<i>Khoảng cách IG</i>	40
22.	Hình 2.5	<i>Công thức Leibnitz</i>	41
23.	Hình 2.6	<i>Ứng dụng điểm Brocard</i>	69
24.	Hình 2.7	<i>Ứng dụng điểm Fermat – Torricelli</i>	70

DANH SÁCH KÝ HIỆU

Stt	Ký hiệu	Nội dung.....	Trang
1.	G	<i>Trọng tâm tam giác</i>	39
2.	H	<i>Trục tâm</i>	45
3.	O	<i>Tâm ngoại tiếp</i>	39
4.	I	<i>Tâm nội tiếp</i>	40
5.	O_A, O_B, O_C	<i>Tâm bàng tiếp</i>	4
11.	O_9	<i>Tâm Euler</i>	10
6.	J	<i>Điểm Gergaune</i>	6
7.	N	<i>Điểm Nagel</i>	8
8.	L	<i>Điểm Lemoine</i>	9
9.	S	<i>Điểm Schiffler</i>	16
10.	E	<i>Điểm Engiabech</i>	19
11.	F	<i>Điểm Feuerbach</i>	24
12.	Z	<i>Điểm Brocard</i>	26
13.	X	<i>Điểm Fermat</i>	30

Lời nói đầu

Các điểm đặc biệt, các đường thẳng đặc biệt của tam giác là đề tài gây hứng thú từ lâu đối với các nhà toán học bởi vì chính chúng có nhiều tính chất hình học đẹp đẽ, được phát triển thành bộ phận quan trọng trong "Hình học tam giác". Tính đến 3/09/2015, số điểm đặc biệt trong tam giác được phát hiện đã lên tới hơn 8000 điểm, mang ký hiệu $X(i), i = 1, \dots, 8000$ (theo "Bách khoa toàn thư các tâm tam giác").

Luận văn chỉ hạn chế nghiên cứu một số điểm đặc biệt và ứng dụng của chúng để có được các hệ thức Hình học mới. Để tiện cho cách trình bày chúng tôi tạm chia thành 2 loại điểm đặc biệt: Điểm đặc biệt loại 1 gồm các điểm quen thuộc như trọng tâm, trực tâm, tâm nội tiếp, tâm ngoại tiếp, các tâm bàng tiếp, tâm Euler, điểm Gergaune, điểm Nagel, điểm Lemoine. Điểm đặc biệt loại 2 gồm các điểm Schiffler, điểm Engiabech, điểm Feurbach, điểm Fermat (hay gọi là điểm Torricenlli).

Theo chúng tôi với những điểm đặc biệt như vậy cũng đã đủ trình bày các tính chất phong phú và các hệ thức Hình học mới trong tam giác. Nhiều điểm ở đây đã được nói đến trong các cuốn sách, chẳng hạn [1], [2], [9], [7]. Tuy nhiên các tài liệu này trình bày vẫn chưa đầy đủ, vả lại các phép chứng minh của chúng tôi đi theo hướng khác, cách khai thác tìm ra các hệ thức hình học được làm theo những phương pháp mới, hiệu quả. Các ứng dụng của các hệ thức, các tính chất vào các bài toán bất đẳng thức, giải phương trình góp phần làm phong phú nội dung của Luận văn. Đó cũng là những điểm mới của luận văn.

Mục đích của đề tài là:

1. Nhắc lại và bổ sung các điểm đặc biệt trong tam giác theo cấu trúc mỗi điểm được trình bày cơ sở định nghĩa, định nghĩa, các tính chất và ứng dụng. Nội dung này được chia làm hai phần: Các điểm loại 1 và các điểm loại 2.

2. Khai thác, phát hiện ra các hệ thức Hình học mới bằng các phương pháp: phương pháp Van Aubel, phương pháp Stewart, phương pháp Leibnitz, phương pháp tổ hợp các hệ thức.

3. Bước đầu nêu một số ứng dụng của các điểm đặc biệt và các hệ thức tìm được để giải các bài toán về bất đẳng thức, các đánh giá liên quan đến R, r, p và đặc biệt ứng dụng để giải các bài toán đại số.

Phạm vi của đề tài là xét một số các điểm đặc biệt trong tam giác, nghiên cứu các tính chất hình học của chúng, đặc biệt chú ý đến các bài toán thi học sinh giỏi, thi Olympic trong nước và Quốc tế, các bài thi vào Trung học phổ thông chuyên và các đề thi Đại học. Ngoài phần mở đầu và danh mục tài liệu tham khảo nội dung luận văn được chia làm hai chương.

Chương 1 dành để trình bày các điểm đặc biệt trong tam giác, chia làm hai loại điểm đặc biệt. Trình bày chi tiết các tính chất của mỗi điểm. Chương 2 với tiêu đề "Các hệ thức liên quan đến các điểm đặc biệt" giới thiệu các hệ thức Hình học mới được phát hiện bằng các phương pháp hiệu quả như đã nói ở trên. Các bài toán bổ sung với số lượng đáng kể cũng góp phần làm cho nội dung luận văn thêm phong phú.

Để hoàn thành được luận văn một cách hoàn chỉnh, tôi luôn nhận được sự hướng dẫn và giúp đỡ nhiệt tình của PGS.TS. Nguyễn Việt Hải, Giảng viên cao cấp Trường Đại Học Hải Phòng. Tôi xin chân thành bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy và xin gửi lời tri ân nhất của tôi đối với những điều thầy đã dành cho tôi.

Tôi xin chân thành cảm ơn ban lãnh đạo phòng Đào tạo sau đại học, quý thầy cô giảng dạy lớp Cao học K8B (2014 - 2016) Trường Đại Học Khoa Học - Đại Học Thái Nguyên đã tận tình truyền đạt những kiến

thức quý báu, tạo mọi điều kiện cho tôi hoàn thành chương trình đào tạo Thạc sĩ, chuyên ngành Phương pháp toán sơ cấp.

Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành nhất tới gia đình, bạn bè, những người đã luôn động viên, hỗ trợ và tạo mọi điều kiện cho tôi trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn.

Xin trân trọng cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 6 năm 2016

Học viên

Nguyễn Thu Hằng

Chương 1

Các điểm và đường đặc biệt trong tam giác

1.1 Các điểm đặc biệt loại một

Ngoài các điểm đặc biệt quen biết trong tam giác như trọng tâm G là giao 3 đường trung tuyến, trực tâm H là giao 3 đường cao, tâm đường tròn ngoại tiếp (tâm ngoại tiếp), tâm đường tròn nội tiếp (tâm nội tiếp) ta xét thêm các điểm đặc biệt khác: các tâm bàng tiếp O_A, O_B, O_C , điểm Gergaune J , điểm Nagel N , điểm Lemoine L và tâm Euler O_9 , mà ta sẽ gọi chung là các điểm đặc biệt loại 1. Các đường đặc biệt sẽ được giới thiệu cùng với các điểm có liên quan.

Nhắc lại về tâm các đường tròn bàng tiếp: Các phân giác của hai góc ngoài một tam giác cắt nhau trên phân giác trong của góc thứ ba. Giao điểm của hai phân giác các góc ngoài và phân giác trong của góc thứ ba là tâm đường tròn tiếp xúc một cạnh của tam giác và các đường kéo dài của 2 cạnh kia. Đường tròn đó gọi là đường tròn bàng tiếp. Mỗi tam giác có 3 đường tròn bàng tiếp. Ta ký hiệu là các đường tròn (O_a, ρ_a) , (O_b, ρ_b) , (O_c, ρ_c) lần lượt tiếp xúc với các cạnh $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ của tam giác. Ta có

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{ABO_a} + S_{ACO_a} - S_{BCO_a} = \frac{c \cdot \rho_a}{2} + \frac{b \cdot \rho_a}{2} - \frac{a \cdot \rho_a}{2} \\ &= \frac{\rho_a(h + c - a)}{2} = \rho_a(p - a) \end{aligned}$$