

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VŨ AN PHƯỢNG

VỀ PHƯƠNG TRÌNH PELL
CỦA CÁC ĐA THỨC VỚI HỆ SỐ HỮU TỈ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VŨ AN PHƯỢNG

VỀ PHƯƠNG TRÌNH PELL
CỦA CÁC ĐA THỨC VỚI HỆ SỐ HỮU TỈ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp

Mã số: 60 46 01 13

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. NGUYỄN ĐÌNH BÌNH

Thái Nguyên - 2016

Mục lục

Danh mục ký hiệu	iii
Mở đầu	1
Chương 1. Phương trình Pell cơ bản và một số ứng dụng	4
1.1 Phương trình Pell loại 1	4
1.2 Phương trình Pell loại 2	8
1.3 Phương trình Pell tổng quát	12
1.4 Một số ứng dụng của phương trình Pell	14
Chương 2. Phương trình Pell mở rộng	20
2.1 Một số kiến thức mở đầu	20
2.2 Liên phân số	22
2.3 Hình học	23
2.4 Kết nối	26
Chương 3. Về phương trình Pell của các đa thức với hệ số hữu tỉ	29
3.1 Các khái niệm	29
3.2 Dạng chuẩn tắc	31
3.3 Phương trình Pell của các đa thức với hệ số hữu tỉ bậc bốn	34

3.3.1	Tham số hóa đường bậc bốn	34
3.3.2	Tính liên phân số của $\sqrt{d(x)}$	37
Kết luận		45
Tài liệu tham khảo		46

Danh mục ký hiệu

$\left\{ \frac{P_n}{Q_n} \right\}$	Dãy các giản phân của liên phân số biểu diễn số vô tỉ α
K	Trường có đặc số khác 2
$K^\times$	Trường có đặc số khác 2 không chứa phần tử 0
$K((x^{-1}))$	Trường các chuỗi lũy thừa hình thức Laurent theo biến x^{-1}
$K[x]$	Trường các đa thức một biến x
$K(x, y)$	Trường các hàm số của đường cong C định nghĩa bởi $y^2 = d(x)$
$\tilde{C}$	Chuẩn của đường cong C
γ	Kiểu hình học của $\tilde{C}$
$\text{Pic}^0(\tilde{C})$	Jacobi của $\tilde{C}$
$\gcd(p(x), q(x))$	Ước chung lớn nhất của $p(x)$ và $q(x)$
$\deg(d(x))$	Bậc của đa thức $d(x)$
$\text{div}(u)$	Ước của u
$\phi : \tilde{C} \hookrightarrow J$	Phép nhúng định nghĩa bởi $R \mapsto [R - Q]$
$\phi(P)$	Điểm xoắn trên $\text{Pic}^0(\tilde{C})$

Mở đầu

Có thể nói Số học là lĩnh vực xuất hiện sớm nhất trong lịch sử Toán học, nó ra đời từ khi con người bắt đầu làm việc với những con số. Số học là một phân môn quan trọng trong toán học đã gắn bó với tất cả chúng ta xuyên suốt quá trình học Toán từ bậc Tiểu học đến Trung học phổ thông. Sự kì diệu của Số học thường tiềm ẩn những thử thách sâu sắc để thách thức trí tuệ của con người. Trong các thành tựu của số học thì phương trình Pell là một phương trình nổi tiếng và có nhiều ứng dụng trong việc giải các bài toán số học hay và khó. Ta biết rằng với d dương và không phải là số chính phương thì phương trình Pell dạng $x^2 - dy^2 = 1$ có vô số nghiệm $x, y \in \mathbb{Z}$. Vào những năm 1760, Euler khám phá ra một số đẳng thức liên quan phương trình Pell. Trong số đó, ông chứng minh rằng nếu $d = n^2 + 1$ với n nguyên thì $(2n^2 + 1)^2 - (n^2 + 1)(2n)^2 = 1$. Đẳng thức như trên có nhiều tiềm năng ứng dụng cho bài toán tìm các lớp số của trường số thực bậc hai. Ví dụ, nếu ta biết rằng $(2n^2 + 1) + (2n)\sqrt{n^2 + 1}$ là phân tử đơn vị cơ bản trong $\mathbb{Q}(\sqrt{n^2 + 1})$ thì ta có thể sử dụng công thức lớp số Dirichlet để tính các lớp số của trường số thực bậc hai có dạng $\mathbb{Q}(\sqrt{n^2 + 1})$.

Được hỗ trợ bởi đẳng thức Euler, Zachary L. Scherr nghiên cứu mở rộng sau của phương trình Pell năm 2013, với câu hỏi:

Cho R là một miền nguyên có đặc số khác 2. Với giá trị $d(x) \in R[x]$ khác hằng, không chính phương như thế nào thì phương trình Pell

$$f(x)^2 - d(x)g(x)^2 = 1 \quad (1)$$

có nghiệm $f(x), g(x) \in R[x]$ hay không, trong đó $g(x)$ khác không?

Chúng ta sẽ gọi nghiệm của (1) với $g(x)$ khác không là nghiệm không tầm thường. Cách giải quyết câu hỏi trên là trước tiên hiểu rõ khi nào tồn tại một nghiệm không tầm thường trong $K[x]$ trong đó K là trường các thương của R . Khi ta biết cách tìm mọi nghiệm trong $K[x]$, ta hy vọng lấy ra các nghiệm mà có hệ số trong R .

Bố cục của luận văn ngoài phần mở đầu và kết luận thì nội dung còn các chương sau:

Chương 1: Phương trình Pell cơ bản và một số ứng dụng. Trong chương này chúng tôi trình bày định nghĩa, điều kiện tồn tại nghiệm, phương pháp giải của các phương trình Pell loại 1, loại 2 và phương trình Pell dạng tổng quát. Đồng thời các ứng dụng của phương trình Pell cũng được trình bày ở phần cuối chương này.

Chương 2: Phương trình Pell mở rộng. Chương này chúng tôi nghiên cứu một số tính chất cơ bản của phương trình Pell mở rộng. Kiến thức của chương này làm cơ sở cho việc chứng minh các kết quả ở chương 3.

Chương 3: Về phương trình Pell của các đa thức với hệ số hữu tỉ

Trình bày mở rộng của phương trình Pell dạng $f(x)^2 - d(x)g(x)^2 = 1$ và các vấn đề liên quan.

Luận văn đến nay đã được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của thầy tôi, TS. Nguyễn Đình Bình, người đã đặt đề tài và tận tình hướng dẫn để tôi

có thể hoàn thành tốt nhất luận văn này. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và lời cảm ơn sâu sắc nhất đến Thầy.

Tôi xin chân thành cảm ơn Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã tạo mọi điều kiện thuận lợi giúp tôi hoàn thành khóa học. Tôi cũng xin được cảm ơn sự nhiệt tình giảng dạy của các giảng viên trong suốt thời gian tôi học tập.

Tôi cũng xin cảm ơn Ban Giám hiệu Trường Phổ thông Liên cấp II - III, Trấn Yên 2, tỉnh Yên Bái đã luôn tạo điều kiện về thời gian và tinh thần để tôi hoàn thành nhiệm vụ học tập của mình.

Cuối cùng, tôi xin gửi những lời cảm ơn đặc biệt nhất tới đại gia đình, bạn bè và các anh chị em đồng nghiệp, những người luôn động viên khích lệ giúp tôi hoàn thành luận văn này.

Thái Nguyên, tháng 5 năm 2016

Học viên

Vũ An Phụng

Chương 1

Phương trình Pell cơ bản và một số ứng dụng

Phương trình Pell có dạng tổng quát là $x^2 - dy^2 = n$, trong đó d và n là các số nguyên cho trước, x và y là các nghiệm nguyên cần tìm. Trong phạm vi chương này, chúng tôi sẽ nêu một số kết quả (không chứng minh) về phương trình Pell loại 1 (với $n = 1$), phương trình Pell loại 2 (với $n = -1$) phương trình Pell tổng quát (với n là một số nguyên dương bất kì, $n \neq 0, \pm 1$). Nội dung trình bày được trích dẫn trong các tài liệu [1, 2, 6].

1.1 Phương trình Pell loại 1

Phương trình Pell loại 1 có dạng

$$x^2 - dy^2 = 1, \tag{1.1}$$

trong đó, d là một số nguyên.

Vì (1.1) bao giờ cũng có hai nghiệm $x = \pm 1, y = 0$ và ta gọi đó là các nghiệm tầm thường của phương trình (1.1).

Ta có các trường hợp sau:

- ★ Nếu $d < -1$ thì phương trình (1.1) chỉ có nghiệm tầm thường.
- ★ Nếu $d = -1$ thì phương trình (1.1) có 4 nghiệm là $x = \pm 1, y = 0$ và $x = 0, y = \pm 1$.

★ Nếu $d = 0$ thì phương trình có vô số nghiệm là $x = \pm 1$ và y nhận giá trị nguyên tùy ý.

★ Nếu d là một số chính phương, $d = n^2, n \in \mathbb{N}^*$ thì phương trình (1.1) có dạng:

$$(x - ny)(x + ny) = 1.$$

Khi đó phương trình chỉ có nghiệm tầm thường.

Do đó ta chỉ xét phương trình (1.1) với giả thiết d là một số tự nhiên không phải là số chính phương. Dưới đây chúng tôi sẽ trình bày lại một số kết quả của phương trình Pell loại 1.

Mệnh đề 1.1.1. *Nếu phương trình Pell có nghiệm không tầm thường thì nó có vô số nghiệm.*

Định lý 1.1.2. *Nếu (x_1, y_1) là nghiệm nhỏ nhất của phương trình Pell (1.1), thì tất cả các nghiệm nguyên dương (x_n, y_n) của phương trình này được xác định bởi công thức:*

$$\begin{cases} x_n = \frac{(x_1 + y_1\sqrt{d})^n + (x_1 - y_1\sqrt{d})^n}{2}, \\ y_n = \frac{(x_1 + y_1\sqrt{d})^n - (x_1 - y_1\sqrt{d})^n}{2\sqrt{d}}, \end{cases} \quad (1.2)$$

với $n = 1, 2, \dots$

Hệ quả 1.1.3. *Công thức truy hồi để tính các nghiệm của phương trình (1.1) như sau:*

$$\begin{cases} x_n = x_1x_{n-1} + dy_1y_{n-1}, \\ y_n = y_1x_{n-1} + x_1y_{n-1}, \end{cases} \quad (n \geq 2). \quad (1.3)$$

Bổ đề 1.1.4. *Giả sử $\left\{\frac{P_n}{Q_n}\right\}$ là dãy các giản phân của liên phân số biểu diễn số vô tỉ α , $\frac{a}{b}$ là một giản phân tối giản với mẫu số $b > 0$ sao cho:*

$$|\alpha b - a| < |\alpha Q_n - P_n|,$$

với chỉ số $n > 1$ nào đó thì $b \geq Q_{n+1}$.