ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TRẦN THỊ LAN HƯƠNG

ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU CẤP CAO QUA NÓN TIẾP TUYẾN CẤP CAO

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TRẦN THỊ LAN HƯƠNG

ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU CẤP CAO QUA NÓN TIẾP TUYẾN CẤP CAO

Chuyên ngành: Toán ứng dụng

Mã số: 60 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

PGS. TS. ĐỖ VĂN LƯU

THÁI NGUYÊN - 2016

Mục lục

Mở đầu

1. Lí do chọn đề tài

Điều kiện tối ưu cấp cao là một bộ phận quan trọng của lý thuyết tối ưu. Năm 1986, Studniarski [12] đã đưa vào khái niệm cực tiểu địa phương cô lập cấp n và dẫn các điều kiện cần và đủ tối ưu cấp cao. Jiménez ([6], 2002) đã đưa vào khái niệm cực tiểu Pareto địa phương chặt cấp n và nghiên cứu các tính chất của loại cực tiểu này. Constantin ([2], 2009) đã thiết lập các điều kiện tối ưu cấp cao dưới ngôn ngữ nón tiếp tuyến cấp cao. Đ.V. Lưu ([11], 2014) đã thiết lập các điều kiện tối ưu cấp cao cho nghiệm hữu hiệu của bài toán tối ưu đa mục tiêu có ràng buộc nón và ràng buộc tập dưới ngôn ngữ nón tiếp tuyến cấp cao. Chú ý rằng điều kiện tối ưu cấp 2 cho phép ta tìm được các nghiệm tối ưu trong tập các điểm dừng. Điều kiện tối ưu cấp cao là đề tài được nhiều tác giả trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu (xem [2-6], [8-12]) và các tài liệu tham khảo trong các công trình đó. Chính vì vậy, tôi chọn đề tài: "Điều kiện tối ưu cấp cao dưới ngôn ngữ nón tiếp tuyến cấp cao".

2. Mục đích của đề tài

Luận văn trình bày điều kiện tối ưu cấp cao cho bài toán tối ưu đơn mục tiêu trơn của E. Constantin ([2], 2009) và bài toán tối ưu đa mục tiêu không trơn của Đ.V. Lưu ([11], 2014) dưới ngôn ngữ nón tiếp tuyến cấp cao.

3. Nội dung của luận văn

Luận văn bao gồm phần mở đầu hai chương, kết luận và danh mục các

tài liệu tham khảo
Chương 1 "Điều kiện tối ưu cấp cao cho bài toán tối ưu đơn mục tiêu có ràng buộc"

Trình bày các điều kiện cần tối ưu cấp cao của E. Constantin [2] cho bài toán tối ưu đơn mục tiêu trơn có ràng buộc dưới ngôn ngữ đạo hàm Fréchet cấp cao và nón tiếp tuyến cấp cao.

Chương 2 "Điều kiện tối ưu cấp cao cho nghiệm hữu hiệu của bài toán tối ưu đa mục tiêu có ràng buộc"

Trình bày các điều kiện cần tối ưu cấp cao cho cực tiểu yếu, cực tiểu Pareto và các điều kiện đủ tối ưu cấp cao của Đ.V. Lưu [11] cho cực tiểu Pareto địa phương chặt cấp cao của bài toán tối ưu đa mục tiêu không trơn có ràng buộc và ràng buộc tập qua đạo hàm Gâteaux cấp cao và nón tiếp tuyến cấp cao.

Nhân dịp này tác giả xin gửi lời cảm ơn đến tập thể các thầy cô giáo đã truyền đạt những tri thức quý giá trong thời gian tác giả học tập tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Đặc biệt tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đối với thầy giáo PGS.TS. Đỗ Văn Lưu đã giúp đỡ, hướng dẫn tận tình và đầy trách nhiệm để tác giả hoàn thành luận văn này. Cuối cùng tác giả xin cảm ơn gia đình, bạn bè và đồng nghiệp đã động viên, ủng hộ và tạo mọi điều kiện cho tác giả trong suốt thời gian nghiên cứu và học tập.

Thái Nguyên, 10 tháng 10 năm 2016
Tác giả

Trần Thị Lan Hương

Chương 1

Điều kiện tối ưu cấp cao cho bài toán đơn mục tiêu có ràng buộc

Chương 1 trình bày các điều kiện cần tối ưu cấp cao của Constantin ([2], 2009) cho bài toán tối ưu đơn mục tiêu trơn có ràng buộc dưới ngôn ngữ đạo hàm Fréchet cấp cao và nón tiếp tuyến cấp cao. Các kết quả trình bày trong chương này được tham khảo trong [1], [2].

1.1. Các khái niệm và kết quả bổ trợ

Xét bài toán tối ưu sau:

$$\min F(x),\ x \in D, \qquad (P)$$

trong đó X là không gian tuyến tính định chuẩn thực với chuẩn $\|\cdot\|$ và $F : U \subseteq X \to \mathbb{R}$ là một hàm lớp C^p trên tập mở U, $\overline{x} \in D \subseteq U$, p là số dương.

Định nghĩa 1.1

Ánh xạ $F : X \to Y$ là khả vi tại $\overline{x}$ nếu có thể được biểu diễn dưới dạng sau đây trong một lân cận của $\overline{x}$

$$F(\overline{x}+h) = F(\overline{x}) + \Lambda h + \alpha(h)\|h\|,$$

trong đó Λ là toán tử tuyến tính liên tục từ không gian định chuẩn X vào không gian định chuẩn Y và

$$\lim_{\|h\|\to 0} \|\alpha(h)\| = \|\alpha(0)\| = 0.$$

Toán tử Λ được gọi là đạo hàm Fréchet của F tại $\overline{x}$ và kí hiệu là $F'(\overline{x})$.

Dưới ngôn ngữ ξ, δ quan hệ trên có thể phát biểu như sau: Với bất kì $\xi > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$\|F(\overline{x} + h) - F(\overline{x}) - \Lambda h\| \leq \xi \|h\|$$

đúng với mọi h mà $\|h\| < \delta$.

Đạo hàm cấp cao được định nghĩa bằng quy nạp

$$F^{(n)}(x) = (F^{(n-1)})'(x) \in L(X, ..., L(X, Y)...))$$

Định nghĩa 1.2

Ta nói rằng $F^{(p)}$ tồn tại $\overline{x} \in U$ nếu $F'(x), F"(x), ..., F^{(p-1)}(x)$ tồn tại trong một lân cận của $\overline{x}$ và $F^{(p)}(\overline{x})$ tồn tại. Nếu $F^{(p)}(x)$ tồn tại tại mỗi điểm $\overline{x} \in U$ và $x \to F^{(p)}(x)$ liên tục theo tô pô chuẩn của không gian $L(X, ..., L(X, Y), ...)$ (sinh ra bởi chuẩn) thì F được gọi là ánh xạ lớp C^p trên U.

Nếu hàm F thuộc lớp C^p trên tập mở U thì $F'(x), F"(x), ..., F^{(p)}(x)$, $p \geq 4$ được kí hiệu là các đạo hàm Fréchet cấp 1, cấp 2,..., cấp p tại $x \in U$ và

$$F^{(p)}(x)[y]^p = F^{(p)}(x)(y)...(y).$$

Định nghĩa 1.3

Nhắc lại rằng giá trị thực $F : U \subseteq X \to \mathbb{R}$ được gọi là có cực tiểu địa phương trên $D \subseteq U$ tại $\overline{x} \in D$ nếu tồn tại $\delta > 0$ sao cho $F(x) \geq F(\overline{x})$ với mọi $x \in D$ thỏa mãn $0 < \|x - \overline{x}\| < \delta$. Nếu bất đẳng thức là chặt thì $\overline{x}$ được gọi là cực tiểu địa phương chặt của F trên D.

Chúng ta sẽ phát biểu các điều kiện cần cấp cao cho một ràng buộc tập D và sau đó sẽ phân tích chi tiết trường hợp D là tập không điểm của ánh xạ khả vi Fréchet $G : X \to Y$, tức là $D = D_G = \{x \in X; G(x) = 0\}$.

Định lí 1.1 *(Quy tắc nhân tử Lagrange)*

Giả sử $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *và* $G = (G_1, G_2, ..., G_k) : U \to \mathbb{R}^k$ *thuộc lớp* C^1 *trên tập mở* $U \subseteq \mathbb{R}^n$*. Nếu* F *có một cực trị trên* $D = \{x \in U; G_1(x) = 0, G_2(x) = 0, ..., G_k(x) = 0\}$*, tại* $x \in D$ *và* $G_1'(\overline{x}), G_2'(\overline{x}), ..., G_k'(\overline{x})$ *là độc lập tuyến tính thì tồn tại một véc tơ duy nhất* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k)$ *gọi là véc tơ nhân tử Lagrange sao cho:*

$$F'(\overline{x}) = \lambda G'(\overline{x}) = \lambda_1 G_1'(\overline{x}) + \lambda_2 G_2'(\overline{x}) + ... + \lambda_k G_k'(\overline{x}).$$

Giả thiết thêm F, G *là lớp* C^2 *trên* U*.*

Nếu $\overline{x}$ *là cực tiểu địa phương của* F *trên* D *thì*

$$[F"(\overline{x}) - \lambda G"(\overline{x})][y]^2 \geq 0,$$

với mọi y *sao cho* $G'(\overline{x})(y) = 0$

Nếu $\overline{x}$ *là cực đại địa phương của* F *trên* D *thì*

$$[F"(\overline{x}) - \lambda G"(\overline{x})][y]^2 \leq 0,$$

với mọi y *sao cho* $G'(\overline{x})(y) = 0.$

Chúng ta nhắc lại điều kiện đủ cấp hai cổ điển sau:

Định lí 1.2

Giả sử rằng $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *và* $G : (G_1, G_2, ..., G_k) : U \to \mathbb{R}^k$ *thuộc lớp* C^2 *trên tập mở* U*,* $\overline{x} \in D = \{x \in D; G_1(x) = 0, G_2(x) = 0, ..., G_k(x) = 0\}$ *và* $\lambda \in \mathbb{R}^k$ *thỏa mãn* $F'(\overline{x}) = \lambda G'(\overline{x})$*. Khi đó,*

(i) Nếu

$$[F"(\overline{x}) - \lambda G"(\overline{x})][y]^2 > 0$$

với mọi $y \neq 0$ *sao cho* $G'(\overline{x})(y) = 0$ *thì* $\overline{x}$ *là cực tiểu địa phương chặt của* F *trên* D*.*

(ii) Nếu

$$[F"(\overline{x}) - \lambda G"(\overline{x})][y]^2 < 0$$

với mọi $y \neq 0$ sao cho $G'(\overline{x})(y) = 0$ thì $\overline{x}$ là cực đại địa phương chặt của F trên D.

Khái niệm sau đây: véc tơ pháp tuyến của tập D tại $x \in D$ sẽ đóng vai trò quan trọng sau này.

Định nghĩa 1.4

Phần tử $v \in X$ được gọi là véc tơ tiếp tuyến của D tại x nếu

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} d(x + tv; D) = 0. \tag{1.1}$$

Tập tất cả các véc tơ tiếp tuyến của D tại $x \in D$ được kí hiệu là $T_x D$ và được gọi là nón tiếp tuyến của D tại x. $T_x D$ là một nón đóng trong X và luôn khác rỗng vì nó chứa $0 \in X$.

Định nghĩa 1.5

Phần tử $v_n \in X$ được gọi là véc tơ tiếp tuyến cấp n của D tại $x \in D$ nếu tồn tại $v_i \in X, i = 1, 2, .., n-1, n \geq 2$ sao cho

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t^n} d(x + tv_1 + \frac{t^2}{2!} v_2 + \frac{t^3}{3!} v_3 + ... + \frac{t^n}{n!} v_n; D) = 0, \tag{1.2}$$

trong đó $d(z, D) = \inf\{\|z - y\|; y \in D\}$.

Các véc tơ $v_i, i = 1, 2, .., n-1$ được gọi các véc tơ liên kết với v_n.

Tập tất cả các véc tơ tiếp tuyến cấp n của D tại $x \in D$ được kí hiệu là $T_x^n D$.

Ta có $T_x^n D,\ n \geq 2$ là một nón trong X.

Thật vậy, lấy $v_n \in T_x^n D$ với các véc tơ liên kết $v_1, ..., v_{n-1}$. Khi đó, tồn tại hàm $\gamma_n : (0, +\infty) \to X$ với $\gamma_n(t) \to 0$ khi $t \downarrow 0$ sao cho

$$x + tv_1 + \frac{t^2}{2!} v_2 + ... + \frac{t^n}{n!}(v_n + \gamma_n(t)) \in D \quad (\forall t > 0).$$

Chú ý rằng với $\lambda > 0$, bao hàm thức trên có thể viết lại như sau

$$x+\frac{t}{\lambda^{\frac{1}{n}}}\left(\lambda^{\frac{1}{n}}v_1\right)+\frac{1}{2!}\left(\frac{t}{\lambda^{\frac{1}{n}}}\right)^2\left(\lambda^{\frac{2}{n}}v_2\right)+$$

$$+\ldots+\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{n}}}\right)^n(\lambda v_n+\lambda\gamma_n(t)\in D \quad (\forall t>0),$$

trong đó $\lambda\gamma_n(t) \to 0$ khi $t \downarrow 0$. Vì vậy, $\lambda v_n \in T_X^n D$ với các véc tơ kết hợp $X^{\frac{1}{n}}v_1, \ldots, \lambda^{\frac{n-1}{n}} v_{n-1}$. Do đó, $T_x^n D$ là một nón.

Rõ ràng là nếu x thuộc vào phần trong của D thì $T_x^n D = X, n \geq 1$, trong đó $T_n^1 D = T_x D$.

Mệnh đề sau đây (xem [2]) cho ta tính chất đặc trưng của véc tơ pháp tuyến cấp n.

Mệnh đề 1.1

(i) $v \in T_x D$ là tương đương với sự tồn tại của hàm $\gamma : (0,\infty) \to X$ với $\gamma(t) \to 0$ khi $t \downarrow 0$ và

$$x + t(v + \gamma(t)) \in D, \quad \forall t > 0$$

ii) $v_n \in T_x^n D$ với các véc tơ liên kết $v_i \in X, i = 1, 2, .., n-1, n \geq 2$, như trong (1.2) là tương đương với sự tồn tại hàm $\gamma_n : (0,\infty) \to X$ với $\gamma_n(t) \to 0$ khi $t \downarrow 0$ và

$$x + tv_1 + \frac{t^2}{2}v_2 + \ldots + \frac{t^n}{n!}(v_n + \gamma_n(t)) \in D, \quad \forall t > 0.$$

Mệnh đề 1.2

Nếu $v_n \in T_x^n D$ thì các véc tơ kết hợp $v_i, 1 \leq i \leq n-1$ thuộc $T_x^i D$.

Tập tiếp tuyến cấp n: $T_x^n D$ là khác rỗng chứa điểm 0 (trong đó có thể lấy $v_i \in T_x^i D, i = 1, 2, .., n-1,\ n \geq 2$).