ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VŨ THỊ HƯƠNG TRANG

PHÂN TÍCH MA TRẬN VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VŨ THỊ HƯƠNG TRANG

PHÂN TÍCH MA TRẬN VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 60 46 01 12

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

TS. NGUYỄN THANH SƠN

Thái Nguyên - 2016

Mục lục

Danh sách thuật toán

Lời nói đầu

Trong toán học ứng dụng, một bước không thể thiếu là minh họa các kết quả lý thuyết trên máy tính. Trong hầu hết trường hợp, các dữ liệu thu được được tập hợp dưới dạng ma trận hay vector. Các ma trận mang nhiều thông tin nhưng lại không hiển thị ở dạng vốn có. Câu hỏi đặt ra là làm thế nào có thể khai thác thông tin hữu ích từ các ma trận đó. Phân tích ma trận thành tích của các ma trận dạng đặc biệt là một phương pháp vô cùng quan trọng và phổ biến trong toán học. Tùy vào mục đích, một ma trận có thể được phân tích thành những dạng khác nhau. Trong luận văn này, chúng tôi sẽ tìm hiểu phân tích LU, phân tích Cholesky, phân tích QR và phân tích giá trị kỳ dị (SVD). Đây là những phép phân tích hết sức cơ bản (nhưng không hề tầm thường) và quan trọng được dùng rất phổ biến trong toán học tính toán. Trong khi trình bày, chúng tôi luôn chú trọng đến cách tiếp cận những khái niệm trên theo quan điểm của toán học tính toán: ma trận cỡ lớn. Chúng tôi cũng trình bày những điểm chính về thuật toán để tính toán những phân tích đó. Cuối cùng, chúng tôi trình bày những ứng dụng khác nhau của các phân tích trên trong tính toán, tối ưu, hình học,...

Luận văn được chia làm hai chương.

- *Chương 1. Phân tích ma trận.* Chương này giới thiệu bốn phân tích đã đề cập ở trên. Với mỗi phân tích, chúng tôi trình bày định nghĩa, một số tính chất và thuật toán để tính toán chúng.

- *Chương 2. Ứng dụng.* Chúng tôi tập trung vào ba ứng dụng chính: Giải hệ phương trình tuyến tính, nén ảnh và giải bài toán bình phương tối thiểu. Sau mỗi phần trình bày, chúng tôi đều cung cấp những ví dụ cụ thể để minh họa cho phương pháp hoặc những tính chất liên quan đến phương pháp.

Chúng tôi không coi đây là một tập hợp đầy đủ các phân tích ma trận mà chỉ chọn ra một vài trong số chúng. Còn rất nhiều phân tích thú vị khác như phân tích Schur, phân tích cực, phân tích giá trị riêng mà chúng tôi không thể trình bày hết.

Luận văn này được thực hiện tại Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên và hoàn thành với sự hướng dẫn của TS. Nguyễn Thanh Sơn (Khoa Toán–Tin, Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên). Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới người hướng dẫn khoa học của mình, người đã đặt vấn đề nghiên cứu, dành nhiều thời gian hướng dẫn và tận tình giải đáp những thắc mắc của tác giả trong suốt quá trình làm luận văn.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn Ban Giám hiệu Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, Ban Chủ nhiệm Khoa Toán–Tin, cùng các giảng viên tham gia giảng dạy đã tạo mọi điều kiện tốt nhất có thể để tác giả học tập và nghiên cứu. Nhân dịp này, tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn tới tập thể Lớp B, cao học Toán khóa 8 (2014-2016) đã động viên và giúp đỡ tác giả rất nhiều trong suốt quá trình học tập.

Lời cuối, tác giả muốn dành những lời cảm ơn đặc biệt nhất đến đại gia đình đã luôn động viên và chia sẻ những khó khăn để tác giả hoàn thành tốt luận văn này.

Thái Nguyên, ngày 20 tháng 5 năm 2016

Tác giả

Vũ Thị Hương Trang

Chương 1

Phân tích ma trận

1.1 Phân tích LU

1.1.1 Định nghĩa

Cho ma trận $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ là một ma trận vuông. Phân tích LU của ma trận A là biểu diễn $A = LU$ với L và U lần lượt là ma trận tam giác dưới và trên cùng kích thước với ma trận A.

1.1.2 Phân tích

Có thể nói phân tích LU là dạng ma trận của phép khử Gauss khi giải hệ phương trình tuyến tính. Ý tưởng của phép phân tích là biến đổi ma trận kích thước $m \times m$ thành ma trận tam giác trên U bằng việc đưa phần tử 0 vào dưới đường chéo chính đầu tiên trong cột thứ nhất, sau đó trong cột hai và như vậy đúng như chéo hóa Householder. Điều này được thực hiện bằng cách trừ đi bội số của mỗi hàng từ các hàng tiếp theo. Quá trình khử này tương đương với nhân ma trận A với một dãy L_k các tam giác trên từ bên trái

$$\underbrace{L_{m-1}\dots L_2 L_1}_{L^{-1}} A = U.$$

Tập hợp $L = L_1^{-1} L_2^{-1} \dots L_m^{-1}$ cho $A = LU$. Như vậy chúng ta đã có phân tích ma trận

$$A = LU$$

trong đó U là ma trận tam giác trên và L là ma trận tam giác dưới với $L_{ii} = 1$ với $i = 1, \dots, m$.

Ma trận A là ma trận tam giác dưới với đường chéo xác định dương bằng 1 được gọi là *ma trận tam giác dưới đơn vị*.

Cho ma trận A kích thước $m \times n$, giả sử $A = (a_{ij})$. Cho k bất kỳ với $1 \leq k \leq n$. Cho $A[1 \dots k, 1 \dots, k]$, nghĩa là ma trận con của A có hệ số là a_{ij}, trong đó $1 < i, j \leq k$.

Mệnh đề 1.1.1. *Cho A mà một ma trận kích thước $n \times n$ khả nghịch. Khi đó ma trận A có phân tích LU $A = LU$ nếu mỗi ma trận $A[1 \dots k, 1 \dots, k]$ là ma trận nghịch đảo, với $k = 1, \dots, n$.*

Mệnh đề 1.1.2. *Cho A mà một ma trận kích thước $n \times n$ khả nghịch. Khi đó ma trận P ma trận là hoán vị sao cho $PA[1 \dots k, 1 \dots, k]$ là ma trận nghịch đảo, với $k = 1, \dots, n$.*

Định lí 1.1.3. *Cho $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ có phân tích LU. Nếu* $\det A[1 : k, 1 : k] \neq 0$ *với* $k = 1 : n - 1$. *Nếu tồn tại phép phân tích LU và ma trận A là ma trận không suy biến thì phân tích LU là duy nhất và* $\det(A) = u_{11} \dots u_{nn}$.

Chứng minh. Với đầu bước k của ma trận A đã được ghi chèn bằng

$$M_{k-1} \dots M_1 A = A^{(k-1)}.$$

Lưu ý là $a_{kk}^{(k-1)}$ là trục thứ k. Từ đó phép biến đổi Gauss là ma trận tam giác dưới đơn vị, bằng cách nhìn vào hàng đầu $k \times k$ một phần của phương trình này $\det(A(1 : k, 1 : k)) = a_{11}^{(k-1)} \dots a_{kk}^{(k-1)}$. Do đó nếu $A(1 : k, 1 : k)$ là ma trận không suy biến thì trục thứ k không là 0.

Về tính duy nhất, nếu $A = L_1U_1$ và $A = L_2U_2$ là hai phân tích LU của một ma trận không suy biến A thì $L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1}$. Từ đó $L_2^{-1}L_1$ là một ma trận tam giác dưới đơn vị và $U_2U_1^{-1}$ là một ma trận tam giác trên, cho nên hai ma trận này phải bằng đồng nhất thức. Do đó $L_1 = L2$, $U_1 = U_2$.

Cuối cùng, nếu $A = LU$ thì

$$\det(A) = \det(LU) = \det(L)\det(U) = \det(U)u_{11}\dots u_{nn}.$$

□

1.1.3 Thuật toán

Để phân tích LU của ma trận $A = (a_{ij})$ kích thước $n \times n$ thành tích $A = LU$ với $L = (l_{ij})$ là một ma trận tam giác dưới và với $U = (u_{ij})$ là một ma trận tam giác trên, trong đó đường chéo chính của một trong hai ma trận L hoặc U gồm các bước

Thuật toán 1 Phân tích LU

Input: chiều n, đưa vào a_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$ của A;

đường chéo $l_{11} = \cdots = l_{nn} = 1$ của L hoặc

đường chéo $u_{11} = \cdots = u_{nn} = 1$ của U

Output: đưa vào l_{ij}, $1 \leq j \leq n$, $1 \leq i \leq n$ của L và đưa vào u_{ij}, $i \leq j \leq n$, $1 \leq i \leq n$ của U.

1.2 Phân tích Cholesky

1.2.1 Định nghĩa

Nhắc lại rằng ma trận $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ đối xứng được gọi là (đối xứng) xác định dương nếu $x^TAx > 0$ với mọi $x \neq 0$.

Định nghĩa 1.2.1. Cho $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ đối xứng xác định dương. Khi đó, tồn tại duy nhất ma trận tam giác dưới khả nghịch L sao cho $A = LL^T$. Hệ thức này được gọi là *phân tích Cholesky* của ma trận A. L được gọi là *nhân tử Cholesky* của A.