ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

LÊ THỊ MAI

DƯỚI VI PHÂN SUY RỘNG VÀ ĐIỀU KIỆN CẦN CHO NGHIỆM HỮU HIỆU CỦA BÀI TOÁN TỐI ƯU ĐA MỤC TIÊU

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

LÊ THỊ MAI

DƯỚI VI PHÂN SUY RỘNG VÀ ĐIỀU KIỆN CẦN CHO NGHIỆM HỮU HIỆU CỦA BÀI TOÁN TỐI ƯU ĐA MỤC TIÊU

Chuyên ngành: **Toán ứng dụng**
Mã số: **60 46 01 12**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

PGS.TS. ĐỖ VĂN LƯU

Thái Nguyên - 2015

Mục lục

Lời cảm ơn

Luận văn này được thực hiện và hoàn thành tại Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên và dưới sự hướng dẫn của PGS.TS Đỗ Văn Lưu, Viện Toán học - Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy hướng dẫn khoa học của mình, thầy đã tận tâm và nhiệt tình chỉ bảo.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu, Ban chủ nhiệm Khoa Toán, Phòng Đào tạo Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, cùng toàn thể các cán bộ giảng dạy lớp cao học toán K7Y đã nhiệt tình giảng dạy và giúp đỡ tác giả trong suốt quá trình học tập.

Cuối cùng tác giả xin cảm ơn bố mẹ, gia đình, bạn bè và đồng nghiệp luôn bên cạnh động viên và giúp đỡ trong quá trình học tập và hoàn thành luận văn này.

Xin trân trọng cảm ơn!

Thái Nguyên, ngày 27 tháng 12 năm 2015

Tác giả

Lê Thị Mai

Mở đầu

Khái niệm dưới vi phân suy rộng không lồi của Jeyakumar – Luc ra đời năm 1999. Đây là một tổng quát hóa các khái niệm dưới vi phân của Clarke, Michel – Penot, Mordukhovich, Clarke-Rockafellar, ... Các điều kiện tối ưu dưới ngôn ngữ dưới vi phân suy rộng mạnh hơn các điều kiện tối ưu dưới ngôn ngữ một số loại dưới vi phân trong một số trường hợp, chẳng hạn cho bài toán với các hàm Lipschitz địa phương. Điều kiện cần Fritz John cho cực tiểu yếu bài toán tối ưu đa mục tiêu trong không gian hữu hạn chiều với các hàm liên tục được D. T. Luc ([6]) thiết lập. Dutta - Chandra ([2]) dẫn điều kiện cần cho cực tiểu yếu dưới ngôn ngữ dưới vi phân suy rộng bán chính quy trên cho bài toán có ràng buộc bất đẳng thức. D. V. Luu ([7,8]) dẫn các điều kiện cần cho cựu tiểu yếu và cựu tiểu Pareto của bài toán tối ưu đa mục tiêu với ràng buộc đẳng thức, bất đẳng thức và ràng buộc tập trong không gian Banach qua dưới vi phân suy rộng. Đây là đề tài được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu. Chính vì thế tôi chọn đề tài: "Dưới vi phân suy rộng và điều kiện cần cho nghiệm hữu hiệu của bài toán tối ưu đa mục tiêu".

Luận văn trình bày các kết quả nghiên cứu về điều kiện cần cho cực tiểu Pareto địa phương và cực tiểu yếu địa phương của bài toán tối ưu đa mục tiêu có ràng buộc đẳng thức, bất đẳng thức và ràng buộc tập trong không gian Banach dưới ngôn ngữ dưới vi phân suy rộng của Đỗ Văn Lưu đăng trên tạp chí Optimizaton, vol 63 (2014), No3, 321-335.

Luận văn bao gồm phần mở đầu, hai chương, kết luận và danh mục tài liệu tham khảo

Chương 1 trình bày một số kiến thức cơ bản về dưới vi phân suy rộng bao gồm dưới vi phân suy rộng trên, dưới vi phân suy rộng dưới, dưới vi phân suy rộng bán chính quy và dưới vi phân suy rộng chính quy, các quy tắc tính và định lí giá trị trung bình cho dưới vi phân suy rộng. Chương 1 cũng trình bày điều kiện cần Kuhn - Tucker cho cực tiểu Pareto địa phương và điều kiện cần Kuhn - Tucker mạnh cho cực tiểu địa phương Pareto của bài toán (MP) với các nhân tử Lagrange dương tương ứng với tất cả các thành phần của hàm mục tiêu.

Chương 2 trình bày về điều kiện cần cho cực tiểu yếu địa phương bao gồm các điều kiện cần Fritz John và Kuhn-Tucker cho cực tiểu yếu địa phương qua dưới vi phân suy rộng bán chính quy trên và điều kiện cần Kuhn - Tucker mạnh cho cực tiểu yếu địa phương với các nhân tử Lagrange dương ứng với tất cả các thành phần của hàm mục tiêu.

Dù đã nghiêm túc nghiên cứu và rất cố gắng thực hiện luận văn, nhưng với trình độ hạn chế cùng nhiều lý do khác, luận văn chắc chắn không tránh khỏi những thiếu sót. Kính mong sự góp ý của các Thầy Cô, các bạn và các anh chị đồng nghiệp để luận văn này hoàn chỉnh và nhiều ý nghĩa hơn.

Thái Nguyên, ngày 27 tháng 12 năm 2015

Tác giả

Lê Thị Mai

Chương 1

Điều kiện cần Kuhn - Tucker cho cực tiểu Pareto địa phương

Chương 1 trình bày một số kiến thức cơ bản về dưới vi phân suy rộng của V. Jeyakumar và D. T. Luc [5], J. Dutta và S. Chandra [2], và các điều kiện cần Kuhn - Tucker cho cực tiểu Pareto địa phương của D. V. Luu [7] dưới ngôn ngữ dưới vi phân suy rộng.

1.1 Dưới vi phân suy rộng

Giả sử X là một không gian Banach và $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ là hàm giá trị thực mở rộng, trong đó $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Không gian đối ngẫu của X được kí hiệu bởi X^* và trang bị với tôpô yếu*. Bao lồi và bao lồi đóng của tập A trong X^* được kí hiệu tương ứng bởi $co(A)$ và $\overline{co}(A)$. Giả sử $x \in X$ tại đó f là hữu hạn. Đạo hàm theo phương Dini dưới và trên của f tại x theo phương v được định nghĩa tương ứng bởi

$$f^-(x, v) := \liminf_{t \downarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t},$$

$$f^+(x, v) := \limsup_{t \downarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(xt)}{t}.$$

Định nghĩa 1.1.

Hàm $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ được gọi là có dưới vi phân suy rộng trên $\partial^* f(x)$ tại x nếu $\partial^* f(x) \subset X^*$ là đóng yếu* và với mỗi $v \in X$,

$$f^-(x, v) \leq \sup_{x^* \in \partial^* f(x)} \langle x^*, v \rangle .$$

Định nghĩa 1.2.

Hàm $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ được gọi là có dưới vi phân suy rộng dưới $\partial_* f(x)$ tại x nếu $\partial_* f(x) \subset X^*$ là đóng yếu* và với mỗi $v \in X$,

$$f^+(x, v) \geq \inf_{x^* \in \partial_* f(x)} \langle x^*, v \rangle .$$

Định nghĩa 1.3.

Hàm $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ được gọi là có dưới vi phân suy rộng $\partial^* f(x)$ tại x nếu nó đồng thời là dưới vi phân suy rộng dưới và trên của hàm f tại x

Điều này có nghĩa là với mỗi $v \in X$,

$$f^-(x, v) \leq \sup_{x^* \in \partial^* f(x)} \langle x^*, v \rangle ,$$

$$f^+(x, v) \geq \inf_{x^* \in \partial^* f(x)} \langle x^*, v \rangle .$$

Điều đó tương ứng với điều kiện: với mỗi $v \in X$,

$$max \left\{ f^-(x, v), -f^+(x, -v) \right\} \leq s\big(v \mid \partial^* f(x)\big),$$

trong đó

$$s(v \mid C) := \sup_{x^* \in C} \langle x^*, v \rangle$$

là hàm tựa của tập đóng yếu* $C \subset X^*$.

Chú ý rằng dưới vi phân suy rộng không nhất thiết phải là lồi hoặc compắc yếu*. Sự mở rộng này cho phép ta áp dụng được cho một lớp rộng hàm liên tục không trơn.

Ví dụ 1.1.

Hàm $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{nếu } x \geq 0, \\ -\sqrt{-x}, & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

có dưới vi phân suy rộng không compắc tại 0 có dạng $[\alpha, \infty)$ với $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 1.2.

Hàm $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x) = -|x|$$

có dưới vi phân suy rộng không lồi tại 0 là $\partial^* f(0) = \{1, -1\}$.

Giả sử $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ là hữu hạn tại điểm $x \in X$. Nếu f là nửa liên tục dưới tại x thì dưới đạo hàm trên Clarke - Rockafellar của f tại x theo phương v được định nghĩa bởi

$$f^{\uparrow}(x, v) = \limsup_{\substack{x' \to_f x \\ t \downarrow 0}} \underset{v' \to v}{inf} \frac{f\left(x^{'} + tv^{'}\right) - f\left(x^{'}\right)}{t},$$

trong đó $x^{'} \to_f x$ có nghĩa là $x^{'} \to x$ và $f(x^{'}) \to f(x)$.

Nếu f là nửa liên tục trên tại x thì dưới đạo hàm dưới Clarke - Rockafellar của f tại x với phương v được định nghĩa bởi

$$f^{\downarrow}(x, v) = \liminf_{\substack{x' \to_f x \\ t \downarrow 0}} \underset{v' \to v}{sup} \frac{f(x^{'} + tv^{'}) - f(x^{'})}{t}.$$

Nếu f liên tục tại x thì $x' \to_f x$ trong định nghĩa của các dưới đạo hàm dưới và trên có thể viết đơn giản là $x' \to x$. Các dưới vi phân suy rộng trên và dưới của f tại x được cho bởi công thức:

$$\partial^{\uparrow} f(x) = \left\{x^* \in X^* : \langle x^*, v\rangle \leq f^{\uparrow}(x, v),\ \forall v \in X\right\},$$

$$\partial^{\downarrow} f(x) = \left\{ x^* \in X^* : \langle x^*, v \rangle \geq f^{\downarrow}(x, v),\ \forall v \in X \right\}.$$

Nếu $f^{\uparrow}(x, 0) > -\infty$ thì $\partial^{\uparrow} f(x)$ là tập con đóng yếu*, lồi, khác rỗng của X^* và với mỗi $v \in X$,

$$f^{\uparrow}(x, v) = \sup_{x^* \in \partial^{\uparrow} f(x)} \langle x^*, v \rangle .$$

Tương tự, nếu $f^{\downarrow}(x, 0) < \infty$ thì $\partial^{\downarrow} f(x)$ là tập con đóng yếu*, lồi, khác rỗng của X^* và với mỗi $v \in X$,

$$f^{\downarrow}(x, v) = \inf_{x^* \in \partial^{\downarrow} f(x)} \langle x^*, v \rangle .$$

Nếu f là Lipschitz địa phương tại x thì

$$f^{\uparrow}(x; v) = f^{\circ}(x, v),$$

$$f^{\downarrow}(x; v) = f_{\circ}(x, v),$$

trong đó

$$f^{\circ}(x, v) = \limsup_{\substack{x' \to x \\ t \downarrow 0}} \frac{f(x' + tv) - f(x')}{t},$$

$$f_{\circ}(x, v) = \liminf_{\substack{x' \to x \\ t \downarrow 0}} \frac{f(x' + tv) - f(x')}{t},$$

là các đạo hàm theo phương suy rộng trên và dưới Clarke của f tại x theo v. Dưới vi phân suy rộng Clarke được xác định bởi

$$\partial^{\circ} f(x) = \left\{ x^* \in X^* : \langle x^*, v \rangle \leq f^{\circ}(x, v),\ \forall v \in X \right\}.$$

Hơn nữa,

$$f^{\circ}(x, v) = \max_{x^* \in \partial^{\circ} f(x)} \langle x^*, v \rangle ,$$

$$f_{\circ}(x, v) = \min_{x^* \in \partial^{\circ} f(x)} \langle x^*, v \rangle .$$

Vì vậy, nếu f Lipschitz địa phương tại x thì $\partial^{\circ} f(x)$ là dưới vi phân suy rộng của f tại x, bởi vì

$$f^{-}(x, v) \leq f^{\circ}(x, v) \text{ và } f^{+}(x, v) \geq f_{\circ}(x, v), \text{ với mỗi } v \in X.$$