ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

LỆNH ANH MINH

VIỆC XÂY DỰNG GIẢI TÍCH TOÁN HỌC TRONG THẾ KỶ 19

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

LỆNH ANH MINH

VIỆC XÂY DỰNG GIẢI TÍCH TOÁN HỌC TRONG THẾ KỶ 19

Chuyên nghành: GIẢI TÍCH
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: GS.TSKH HÀ HUY KHOÁI

THÁI NGUYÊN - 2015

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan rằng nội dung trình bày trong luận văn này là trung thực và không trùng lặp với các đề tài khác. Tôi cũng xin cam đoan rằng mọi sự giúp đỡ cho việc thực hiện luận văn này đã được cảm ơn và các thông tin trích dẫn trong luận văn đã được chỉ rõ nguồn gốc.

Thái Nguyên, tháng 8 năm 2015

Người viết luận văn

Lệnh Anh Minh

Xác nhận	Xác nhận
của trưởng khoa chuyên môn	của người hướng dẫn khoa học

GS.TSKH Hà Huy Khoái

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình và chỉ bảo nghiêm khắc của thầy giáo GS.TSKH Hà Huy Khoái. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc đến thầy.

Tôi xin chân thành cảm ơn Ban Giám hiệu trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, các thầy cô giáo Khoa Toán - trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, các thầy ở Viện Toán học - Viện Hàn lâm KHCN Việt Nam đã tận tình truyền đạt những kiến thức quý báu cũng như tạo điều kiện thuận lợi nhất để tôi hoàn thành được luận văn này.

Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành nhất tới gia đình, bạn bè, đồng nghiệp, những người đã luôn động viên, hỗ trợ và tạo mọi điều kiện cho tôi trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn.

Xin trân trọng cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 8 năm 2015

Người viết luận văn

Lệnh Anh Minh

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

Tìm hiểu sự hình thành và phát triển của giải tích toán học thế kỷ 19 giúp chúng ta nhận thức rõ hơn bản chất của những khái niệm và kết quả trong giải tích toán học. Điều này hết sức quan trọng đối với những người làm công tác giảng dạy, với học sinh, sinh viên, và những người nghiên cứu về giải tích toán học. Vì thế chúng tôi chọn việc trình bày quá trình hình thành và phát triển của một số khái niệm và kết quả của giải tích toán học thế kỷ 19 làm đề tài luận văn của mình.

Thế kỷ 19 thường được gọi là thời kỳ của sự chặt chẽ. Sự chặt chẽ không chỉ là vấn đề làm rõ một số khái niệm cơ bản và thay đổi cách chứng minh của một số định lý cơ bản; mà nó còn xâm chiếm gần như tất cả các phần của giải tích và làm cho nó có diện mạo như bây giờ chúng ta học trong trường trung học và đại học. Phong trào tiến tới sự chặt chẽ có thể được xem như là một quá trình sáng tạo. Nó tạo ra những lĩnh vực hoàn toàn mới của toán học, đặt nền tảng cho giải tích, topo với các khái niệm hoàn toàn mới như: liên tục (hội tụ) theo từng điểm và liên tục (hội tụ) đều, tính compact, tính đầy đủ, ….

Tuy nhiên, sẽ là sai lầm khi cho rằng trong thế kỷ 19 sự chặt chẽ được coi là vấn đề cấp bách nhất trong giải tích. Phần lớn các nhà toán học làm việc chủ yếu để mở rộng và áp dụng các lý thuyết giải tích mà họ thừa hưởng từ những người đi trước. Chuỗi Fourier là đặc biệt quan trọng trong lĩnh vực này kể từ khi nó thách thức những ý tưởng cũ về các khái niệm hàm số, tích phân, hội tụ, liên tục, …, nhưng phương trình vi phân, lý thuyết thế vị, phương trình elliptic và các lĩnh vực khác cũng góp phần vào quá trình của sự chặt chẽ.

Giảng dạy cũng là một động lực chính thúc đẩy sự chặt chẽ của giải tích. Một số nhà toán học thấy khó khăn khi phải giới thiệu về giải tích; và do đó họ quyết định cải cách nó. Đó chính là cơ sở trực tiếp của sự cải cách của Cauchy và Weierstrass, và việc xây dựng tập số thực của Dedekind và Méray. Người ta nhận thấy rằng những nền tảng của giải tích cần phải được sửa đổi. Trong thế kỷ 18 và đầu thế kỷ 19 ở Pháp, giải tích đã liên kết chặt chẽ với vật lý lý thuyết. Điều này có nghĩa sự chính xác của các quy tắc của giải tích có thể được chứng thực bởi thành công của nó trong các ứng dụng; cụ thể hơn, chẳng hạn, sự tồn tại nghiệm của phương trình vi phân, hoặc tồn tại tổng của chuỗi được suy ra từ hiện tượng vật lý. Tuy nhiên, trong suốt nửa đầu của thế kỷ 19, đặc biệt là ở Đức, các trường trung học và đại học, chứ không phải là các trường kỹ thuật, đã trở thành trung tâm đào tạo và nghiên cứu toán học. Điều này thúc đẩy sự phát triển của toán học thuần túy như là một lĩnh vực độc lập. Nhờ đó, nó cung cấp cho toán học, bao gồm giải tích, một nền tảng vững chắc của riêng nó, độc lập với các ứng dụng.

Trong thời gian này giải tích tách rời khỏi hình học. Kể từ Euclid, hình học đã được coi là nền tảng tốt nhất để hình thành toán học, và mặc dù khái niệm về số đã được mở rộng để bao gồm số vô tỉ và số siêu việt, hầu hết các nhà toán học đã tìm cách lý giải các khái niệm mở rộng về số trong lý thuyết về đại lượng của Euclid. Bức tranh chung này đã thay đổi trong thế kỷ 19. Nhiều lỗ hổng đã được phát hiện trong lập luận của Euclid, và hệ tiên đề Hilbert trong hình học ra đời. Nó đã chỉ ra rằng định lý cơ bản của giải tích xưa nay vẫn được dựa trên trực giác hình học đang rất cần một cơ sở vững chắc hơn, là tiên đề về các dãy đoạn thắt. Đặc biệt một số nhà toán học đã tìm cách chứng minh định lý giá trị trung gian, trong đó nói rằng một hàm số liên tục nhận cả hai giá trị dương và âm trên một khoảng sẽ nhận giá trị bằng không.

Số thực (và phức) được xây dựng từ các số hữu tỉ, số hữu tỷ lại được xây dựng từ các số tự nhiên, và giải tích được xây dựng mới hoàn toàn bỏ qua hình học. Mặc dù Pasch, Peano, Pieri và Hilbert đã đưa ra một nền tảng vững chắc của tiên đề hình học tại thời điểm đó, nó không bao giờ lấy lại được vai trò của mình trong cơ sở của giải tích.

Người ta có thể phân chia quá trình chặt chẽ hoá của giải tích thành hai giai đoạn: giai đoạn một ở Pháp, chiếm ưu thế bởi Cauchy, và giai đoạn hai ở Đức chiếm ưu thế bởi Weierstrass. Điều này phản ánh hình ảnh chung được chấp nhận trong thế kỷ 19, theo đó, Pháp là quốc gia toán học hàng đầu cho đến khoảng giữa thế kỷ, sau đó Đức vượt lên dẫn trước.

Nội dung của bản luận văn này được trình bày trong hai chương. Chương 1 trình bày hoàn cảnh ra đời những khái niệm cơ bản của giải tích toán học trong thế kỷ 19. Chương 2 trình bày quá trình phổ biến và phát triển giải tích toán học thế kỷ 19.

Chương 1

HOÀN CẢNH RA ĐỜI NHỮNG KHÁI NIỆM CƠ BẢN CỦA GIẢI TÍCH TOÁN HỌC TRONG THẾ KỶ 19

Trong chương này tôi trình bày hoàn cảnh ra đời các định nghĩa, định lý và các khái niệm cơ bản của Giải tích toán học trong thế kỷ 19. Nội dung chương này trình bày theo các tài liệu [1], [3], [4], [6], [7].

1.1. Khái niệm về hàm số

Kể từ Euler, giải tích đã được coi là lý thuyết các hàm số. Tuy nhiên, hàm số là gì? Ý nghĩa của khái niệm này thay đổi theo thời gian. Euler đã đưa ra hai định nghĩa: trong *Introductio in analysis infinitorum* (1748) (Nhập môn về giải tích vô cùng bé), hàm số được định nghĩa như là một biểu thức giải tích (ví dụ, một công thức) có chứa các hằng số và biến, nhưng trong *Institutiones Calculi differentialis* (1755) (Phép tính vi phân) nó được định nghĩa như là sự phụ thuộc của một biến phụ vào biến khác. Trong *Cours d'Analyse* (Giáo trình giải tích) của Cauchy, cuốn sách giáo khoa đầu tiên báo trước kỷ nguyên mới của sự chặt chẽ, hàm số được định nghĩa một cách duy nhất như là các biến phụ thuộc vào các biến số khác.

Giả sử các đại lượng biến thiên được kết nối với nhau, sao cho khi giá trị của một trong trong những biến là đã biết, thì các giá trị của tất cả những biến còn lại có thể được biểu diễn bởi biến đó. Khi đó ta nói biến đó là biến độc lập; và các đại lượng khác được thể hiện qua các biến độc lập là những cái mà chúng ta gọi là hàm số của biến này.

Sau Cauchy, Fourier từ bỏ một cách dứt khoát hơn với việc xem hàm số như