ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

MA THỊ NHUNG

VỀ HÀM PHÂN HÌNH $f'P'(f)$ VÀ $g'P'(g)$ CHUNG NHAU MỘT HÀM NHỎ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

MA THỊ NHUNG

VỀ HÀM PHÂN HÌNH $f'P'(f)$ VÀ $g'P'(g)$ CHUNG NHAU MỘT HÀM NHỎ

Chuyên ngành: GIẢI TÍCH
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
PGS.TS HÀ TRẦN PHƯƠNG

Thái Nguyên - Năm 2015

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan rằng nội dung trình bày trong luận văn này là trung thực và không trùng lặp với các đề tài khác đã công bố ở Việt Nam. Tôi cũng xin cam đoan rằng mọi sự giúp đỡ cho việc thực hiện luận văn này đã được cảm ơn và các thông tin trích dẫn trong luận văn đã được chỉ rõ nguồn gốc.

Thái nguyên, tháng 8 năm 2015

Người viết Luận văn

Ma Thị Nhung

Xác nhận của trưởng khoa chuyên môn	Xác nhận của người hướng dẫn khoa học

PGS.TS Hà Trần Phương

Lời cảm ơn

Để hoàn thành được luận văn, tôi luôn nhận được sự hướng dẫn và giúp đỡ nhiệt tình của PGS.TS Hà Trần Phương (Trường Đại học Sư phạm Thái Nguyên). Tôi xin chân thành bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy và xin gửi lời tri ân nhất của tôi đối với những điều thầy đã dành cho tôi.

Tôi xin chân thành cảm ơn Lãnh đạo phòng Đào tạo, đặc biệt là các thầy cô trực tiếp quản lý đạo tạo sau đại học, quý thầy cô giảng dạy lớp Cao học K21 (2013- 2015) Trường Đại học Sư Phạm - Đại học Thái Nguyên đã tận tình truyền đạt những kiến thức quý báu cũng như tạo điều kiện cho tôi hoàn thành khóa học.

Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành nhất tới gia đình, bạn bè, những người đã luôn động viên, hỗ trợ và tạo mọi điều kiện cho tôi trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn. Xin trân trọng cảm ơn!

Thái nguyên, tháng 8 năm 2015

Người viết Luận văn

Ma Thị Nhung

Mục lục

Mở đầu

Một ứng dụng quan trọng của Lý thuyết phân bố giá trị Nevanlinna là nghiên cứu sự xác định duy nhất của một hàm phân hình thông qua ảnh ngược của một tập hữu hạn. Năm 1926, R. Nevanlinna được chứng tỏ một hàm phân hình trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ được xác định một cách duy nhất bởi ảnh ngược không tính bội của 5 phân biệt các giá trị. Công trình này của Ông được xem là khởi nguồn cho các vấn đề nghiên cứu về tập xác định duy nhất. Về sau, việc nghiên cứu sự xác định các hàm phân hình bởi ảnh ngược của một tập hữu hạn phần tử đã thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà toán học trong và ngoài nước.

Năm 1976, F.Gross ([8]) đã đặt ra câu hỏi: "tồn tại một tập hợp hữu hạn S, điều kiện $E(S, f) = E(S, f)$ kéo theo $f \equiv g$?". Năm 1995, H.X. Yi ([14]) trả lời câu trả lời câu hỏi của Gross trong trường hợp hàm nguyên và năm 1998, G. Frank và M.Reinders ([6]) đã nghiên cứu trong trường hợp hàm phân hình. Trong thực tế, câu hỏi của Gross có thể được phát biểu như sau: khẳng định tồn tại hay không đa thức P sao cho với bất cứ cặp hàm phân hình khác hằng f và g ta có $f \equiv g$ nếu $P(f)$ và $P(g)$ chung nhau một giá trị một giá trị CM? Một cách tự nhiên, ta đưa ra câu hỏi sau: tồn tại hay không đa thức chứa đạo hàm P sao cho với bất cứ cặp hàm phân hình khác hằng f và g ta có $f \equiv g$ nếu $P(f)$ và $P(g)$ chung nhau một giá trị CM? Đã có một số công trình công bố theo hướng nghiên cứu này. Chẳng hạn năm 2001, M. L. Fang and W. Hong ([7]) đã chứng minh: *Cho f và g là hai hàm phân hình siêu việt, $n \geq 11$ là một số nguyên dương. Nếu $f^n(f-1)f'$ và $g^n(g-1)g'$ chung nhau giá trị 1 kể cả bội thì $f = g$.* Năm 2004, W. C. Lin và H. X. Yi ([12]) chứng minh: *Cho f và g là hai hàm phân hình siêu việt, $n \geq 13$ là một số nguyên dương.*

Nếu $f^n(f-1)^2f'$ *và* $g^n(g-1)^2g'$ *chung nhau* z *kể cả bội thì* $f = g$*....*

Với mong muốn tìm hiểu vấn đề hàm phân hình được xác định một cách duy nhất bởi điều kiện đại số có chứa đạo hàm chúng tôi chọn đề tài **"Về hàm phân hình $f'P'(f)$ và $g'P'(g)$ chung nhau một hàm nhỏ"**. Mục đích chính của luận văn là trình bày một số kết quả được công bố vào năm 2013 bởi K. Boussaf, A. Escassut và J. Ojeda trong [2]. Luận văn này gồm có hai chương như sau:

Chương 1: Một số kiến thức cơ bản trong lý thuyết Nevanlinna. Trong chương này chúng tôi trình bày một số kiến thức cơ bản trong lý thuyết phân bố giá trị Nevanlinna cho các hàm phân hình, chứng minh một số bổ đề sử dụng trong việc chứng minh các kết quả chính trong Chương 2.

Chương 2: Vấn đề duy nhất khi đa thức chứa đạo hàm chung nhau một hàm nhỏ. Đây là chương chính của luận văn, chúng tôi trình bày lại một số kết quả nguyên cứu của K. Boussaf, A. Escassut và J. Ojeda về điều kiện đại số của đa thức chứa đạo hàm để hai hàm phân hình là bằng nhau.

Chương 1

Một số tính chất về phân bố giá trị của hàm phân hình

1.1 Các hàm Nevanlinna

1.1.1 Hàm đếm và tính chất

Để thuận tiện cho việc theo dõi các vấn đề trình bày trong luận văn, trước hết chúng tôi nhắc lại một số khái niệm trong lý thuyết phân bố giá trị của Nevanlinna. Các kiến thức này có thể tìm thấy trong nhiều tài liệu, chẳng hạn trong [2]. Cho f là một hàm phân hình trên $\overline{D}_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ và một số thực $r > 0$, trong đó $0 < R \leq \infty$ và $0 < r < R$.

Định nghĩa 1.1.1. Hàm

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\varphi})| \mathrm{d}\varphi$$

là *hàm xấp xỉ* của hàm f.

Ta kí hiệu $n(r, f)$ là số cực điểm kể cả bội, $\overline{n}(r, f)$ là số cực điểm phân biệt của hàm f trong $\overline{D}_r$. Với một số nguyên dương Δ, kí hiệu $n_{[\Delta]}(r, f)$ là số cực điểm bội chặn bởi Δ của hàm f (tức là cực điểm bội $k > \Delta$ chỉ được tính Δ lần trong tổng $n_{[\Delta]}(r, f)$) trong $\overline{D}_r$.

Định nghĩa 1.1.2. Hàm

$$N(r,f)=\int_0^r \frac{n(t,f)-n(0,f)}{t}dt+n(0,f)\log \mathrm{r},$$

được gọi là *hàm đếm kể cả bội* của hàm f (còn được gọi là *hàm đếm tại các cực điểm*). Hàm

$$\overline{N}(r,f)=\int_0^r \frac{\overline{n}(t,f)-\overline{n}(0,f)}{t}dt+\overline{n}(0,f)\log r$$

được gọi là *hàm đếm không kể bội*. Hàm

$$N_{[\Delta]}(r,f)=\int_0^r \frac{n_{[\Delta]}(t,f)-n_{[\Delta]}(0,f)}{t}dt+n_{[\Delta]}(0,f)\log r$$

được gọi là *hàm đếm bội chặn bởi* Δ, trong đó $n(0,f)=\lim\limits_{t\to 0} n(t,f)$; $\overline{n}(0,f)=\lim\limits_{t\to 0}\overline{n}(t,f)$; $n_{[\Delta]}(0,f)=\lim\limits_{t\to 0} n_{[\Delta]}(t,f)$. Số Δ trong $N_{[\Delta]}(r,f)$ được gọi là *chỉ số bội chặn*. Ta kí hiệu

$$\overline{Z}(r,f)=\overline{N}(r,1/f);\quad Z(r,f)=N(r,1/f);\quad Z_{[\Delta]}(r,f)=N_{[\Delta]}(r,1/f).$$

Định nghĩa 1.1.3. Hàm

$$T(r,f)=m(r,f)+N(r,f)$$

gọi là *hàm đặc trưng* của hàm f.

Các hàm $N(r,f),m(r,f),T(r,f)$ được gọi chung là các hàm Nevanlinna

Các bổ đề sau đây là một số tính chất cơ bản của hàm Nevanlinna: