ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC**

**NGÔ MINH HIẾU**

# NGUYÊN LÝ DESCARTES VÀ ỨNG DỤNG TRONG KHẢO SÁT ĐA THỨC THỰC

**LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC**

**Thái Nguyên - 2015**

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC**

**NGÔ MINH HIẾU**

# NGUYÊN LÝ DESCARTES VÀ ỨNG DỤNG TRONG KHẢO SÁT ĐA THỨC THỰC

**Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp**
**Mã số: 60 46 01 13**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

**GS.TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU**

**Thái Nguyên - 2015**

# Mục lục

# Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan các số liệu và kết quả nghiên cứu trong luận văn này là trung thực và không trùng lặp với các đề tài khác. Tôi cũng xin cam đoan mọi thông tin trích dẫn trong luận văn đã được chỉ rõ nguồn gốc.

*Thái Nguyên, ngày 10 tháng 4 năm 2015*

Học viên

**Ngô Minh Hiếu**

# Lời cảm ơn

Trước hết, tôi muốn gửi những lời biết ơn sâu sắc tới người hướng dẫn khoa học của mình, GS.TSKH. Nguyễn Văn Mậu, người đã hết lòng giúp đỡ, động viên và chỉ bảo tôi trong quá trình học tập và luận văn này.

Tôi muốn gửi lời cảm ơn đến Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên vì luôn tạo điều kiện thuận lợi dành cho tôi trong suốt thời gian học tập tại Khoa.

Cuối cùng tôi muốn gửi những tình cảm đặc biệt tới đại gia đình tôi, những người luôn động viên và chia sẻ những khó khăn trong quá trình hoàn thành luận văn.

# Mở đầu

Đa thức có vị trí rất quan trọng trong toán học không những là một đối tượng nghiện cứu trọng tâm của Đại số mà còn là một công cụ đắc lực của Giải tích trong lý thuyết xấp xỉ, lý thuyết biểu diễn, lý thuyết điều khiển, tối ưu... Ngoài ra, lý thuyế về đa thức còn được sử dụng nhiều trong toán cao cấp, toán ứng dụng.

Trong các kỳ thi học sinh giỏi quốc gia, Olympic quốc tế thì các bài toán về đa thức cũng được đề cập nhiều và được xem như là dạng toán khó của bậc phổ thong. Các bài toán lien quan đến đa thức cũng nằm trong chương trình thi Plympic sinh viên giữa các trường đại học và cao đẳng về Giải tích và Đại số.

Tuy nhiên cho đến nay đa thức chỉ được trình bày ở dạng sơ lược, các bài tập về đa thức chưa được phân loại và hệ thống hóa một cách chi tiết. Tài liệu về đa thức chưa có nhiều, còn chưa được hệ thống theo dạng toán cũng như phương pháp giải. Vì vậy, việc khảo sát sâu hơn các bài toán về đa thức gặp rất nhiều khó khăn, nhất là về thuật toán.

Để đáp ứng cho nhu cầu bồi dưỡng giáo viên và bồi dưỡng học sinh giỏi về chuyên đề đa thức, luận văn “Nguyên lý Descartes và ứng dụng trong khảo sát đa thức thực” phần nào sẽ giúp bổ sung bồi dưỡng thêm kiến thức còn thiếu của giáo viên và học sinh về đa thức và ứng dụng của đa thức.

Ngoài phần Mở đầu và Kết luận, luận văn được chia làm 3 chương đề cập đến các vấn đề sau đây:

- Chương 1 trình bày các tính chất cơ bản của đa thức thực và nguyên lý Descartes.

- Chương 2 trình bày biểu diễn một số dạng đa thức dương trên một đoạn.

- Chương 3 trình bày một số ứng dụng của nguyên lý Descartes.

*Thái Nguyên, tháng 05 năm 2015*

**Ngô Minh Hiếu**

*Học viên Cao học Lớp B Khóa 06/2013-06/2013*

*Chuyên ngành Phương pháp Toán sơ cấp*

*Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên*

Email: minh_hieu1678@yahoo.com

# Chương 1

# Một số kiến thức bổ trợ về đa thức

## 1.1 Một số tính chất cơ bản của đa thức

**Định nghĩa 1.1.1** (xem [3])**.** Một đa thức bận $n$ của ẩn $P_n(x)$ là biểu thức dạng

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

trong đó các hệ số $a_n,\ a_{n-1}, \ldots, a_1,\ a_0$ là những số thực (hoặc phức) và $a_n \neq 0,\ n \in \mathbb{N}$.

Ta kí hiệu

(i) Bậc của đa thức $P_n(x)$ là $\deg P_n(x)$. Do vậy $\deg P_n(x) = n$.

(ii) $a_n$ - hệ số cao nhất (chính) của đa thức.

(iii) $a_0$ - hệ số tự do của đa thức.

(iv) $a_n x^n$ - hạng tử cao nhất.

**Chú ý 1.1.2.** Về sau ta chỉ xét các đa thức $P_n$ với các hệ số của nó đều là thực và gọi tắt là *đa thức thực*.

**Định nghĩa 1.1.3** (xem [3])**.** Cho đa thức

$$P_n\left(x\right) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad \text{với } a_n \neq 0.$$

Số $\alpha \in \mathbb{C}$ được gọi là *nghiệm* của đa thức $P_n(x)$ nếu $P_n(\alpha) = 0$.

Nếu tồn tại $k \in \mathbb{N},\ k > 1$ sao cho $P_n\left(x\right) \vdots \left(x-\alpha\right)^k$ nhưng $P-n(x)$ không chia hết cho $\left(x-\alpha\right)^{k+1}$ thì $\alpha$ được gọi là nghiệm bội $k$ của đa thức $P_n(x)$.

Đặc biệt, $k = 1$ thì $\alpha$ được gọi là nghiệm đơn, $k = 2$ thì $\alpha$ được gọi là nghiệm kép.

**Định lí 1.1.4** (Gauss, xem [3])**.** *Mọi đa thức bậc $n \geq 1$ trên trường $\mathbb{C}$ đều có đúng $n$ nghiệm nếu mỗi nghiệm được tính một số lần bằng bội của nó.*

**Bổ đề 1.1.5** (xem [3])**.** *Các nghiệm phức thực sự của phương trình đa thức thực $P_n(z) = 0$ xuất hiện theo từng cặp nghiệm liên hợp.*

**Định lí 1.1.6** (xem [3])**.** *Mọi đa thức với hệ số thực đề có thể biểu diễn dưới dạng*

$$P_n\left(x\right) = a_0(x-\alpha_1)^{n_1}\ldots(x-\alpha_r)^{n_r}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{m_1}\ldots\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{m_s}$$

*trong đó*

$$\sum_{i=1}^{r} n_i + 2\sum_{i=1}^{s} m_i = n, \quad p_i^2 - 4q_i < 0,\ i = \overline{1,s}.$$

*và $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r;\ p_1, p_2, \ldots, p_s \in \mathbb{R}$.*

Từ Định lí 1.1.6 ta dễ dàng suy ra các hệ quả quan trọng sau đây.

**Hệ quả 1.1.7.**

(1) *Số nghiệm phức của một đa thức với hệ số thực (nếu có) luôn là số chẵn.*

(2) *Nếu đa thức $f(x)$ với hệ số thực chỉ có nghiệm phức thì $f(x)$ là một đa thức bậc chẵn.*

(3) *Giả sử $P_n(x)$ là đa thức bậc $n$ có $k$ nghiệm thực với $k \leq n$ thì $n$ và $k$ cùng tính chẵn lẻ.*

(4) *Đa thức bậc lẻ với hệ số thực luôn có ít nhất một nghiệm thực.*

**Định lí 1.1.8** (xem [3])**.** *Một đa thức thực bậc $n$ đều có không quá $n$ nghiệm thực.*

**Định lí 1.1.9** (Tính chất của hàm đa thức, xem [3])**.** *Mọi đa thức $P_n(x) \in \mathbb{R}[x]$ đều xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Ngoài ra,*

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad \textit{với } a_n \neq 0.$$

*Khi $x \to +\infty$ thì $P_n(x) \to d(a_n)\infty$. Khi $x \to +-\infty$ thì $P_n(x) \to (-1)^n d(a_n)\infty$ trong đó $n = \deg P_n(x)$, $a_n$ là hệ số chính và*

$$d(a) = \begin{cases} + & \textit{nếu } a > 0 \\ - & \textit{nếu } a < 0 \\ 0 & \textit{nếu } a = 0 \end{cases}$$

## 1.2 Nguyên lý Descartes đối với đa thức

Xét dãy số thực $a_0,\ a_1, \ldots$(hữu hạn hoặc vô hạn) cho trước.

**Định nghĩa 1.2.1** (xem [3])**.** Chỉ số $m,\ (m \geq 1)$ được gọi là *vị trí (chỗ) đổi dấu* của dãy nếu $a_{m-1}a_m < 0$ hoặc là

$$a_{m-1} = a_{m-2} = \ldots = a_{m-(k+1)}$$

và

$$a_{m-k}a_m < 0 \quad (m > k \geq 2)$$

Trong trường hợp thứ nhất thì $a_{m-1}$ và $a_m$, còn trong trường hợp thứ hai thì $a_{m-k}$ và $a_m$ lập thành vị trí đổi dấu. Số lần đổi dấu (bằng số vị trí dổi dấu) của một dãy nào đó vẫn không thay đổi nếu các số hạng bằng $0$ được bỏ đi còn những số hạng còn lại vẫn bảo toàn vị trí tương hỗ của chúng.

**Nhận xét 1.2.2.** Ta có các nhận xét sau đây.

(1) Các dãy số $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ và $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ có cùng một số lần đổi dấu.

(2) Khi gạch bỏ các số hạng của dãy, số lần đổi dấu không tăng lên.