ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN BÍCH LƯƠNG

PHƯƠNG PHÁP HIỆU CHỈNH CẢI BIÊN CHO THUẬT TOÁN ĐIỂM GẦN KỀ TÌM KHÔNG ĐIỂM CỦA TOÁN TỬ ĐƠN ĐIỆU

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN BÍCH LƯƠNG

PHƯƠNG PHÁP HIỆU CHỈNH CẢI BIÊN CHO THUẬT TOÁN ĐIỂM GẦN KỀ TÌM KHÔNG ĐIỂM CỦA TOÁN TỬ ĐƠN ĐIỆU

Chuyên ngành: **Toán ứng dụng**
Mã số: **60 46 01 12**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:

GS.TS. NGUYỄN BƯỜNG

Thái Nguyên - 2015

Mục lục

Lời cảm ơn

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới GS.TS Nguyễn Bường, người đã tận tình chỉ bảo, định hướng, chọn đề tài và truyền đạt kiến thức để tôi có thể hoàn thành luận văn này.

Tôi cũng xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới các thầy cô giáo trong trường Đại học Khoa học Thái Nguyên, đặc biệt là các thầy cô trong Khoa Toán - Tin, đã giúp đỡ tôi trong suốt quá trình nghiên cứu và học tập.

Qua đây tôi cũng xin gửi lời cảm ơn Trường Cao đẳng Sư phạm Hưng Yên, tập thể lớp Cao học K7Y, gia đình, bạn bè, đồng nghiệp đã động viên, góp ý và cho tôi những nhận xét quý báu.

Mặc dù đã có nhiều cố gắng nhưng luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót, tôi rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của các quý thầy cô và các bạn để luận văn được hoàn thiện hơn.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 12 năm 2015

Tác giả

Nguyễn Bích Lương

Danh sách ký hiệu

Trong toàn luận văn, ta dùng những ký hiệu với các ý nghĩa xác định trong bảng dưới đây:

$\mathbb{R}$	không gian số thực
$\mathcal{H}$	không gian Hilbert thực
X^*	không gian đối ngẫu của X
$domA$	miền hữu hiệu của A
$D(T)$	miền xác định của T
$R(T)$	miền ảnh của T
$N_C(x)$	nón pháp tuyến tại điểm x trên tập C
$\text{Fix}(S)$	tập điểm bất động của ánh xạ S
$\langle x, y\rangle$	tích vô hướng của hai vectơ x và y
$\delta_C(.)$	hàm chỉ trên C
$\|x\|$	chuẩn của vectơ x
$x^n \to x$	dãy $\{x^n\}$ hội tụ mạnh tới x
$x^n \rightharpoonup x$	dãy $\{x^n\}$ hội tụ yếu tới x
$x := y$	x được gán bằng y
$\forall x$	mọi x
$\exists x$	tồn tại x
$\varnothing$	tập rỗng
I	ánh xạ đơn vị

Lời mở đầu

Toán tử đơn điệu là một trong những lĩnh vực của giải tích hiện đại đã và đang được nhiều nhà toán học hàng đầu thế giới nghiên cứu, đặc biệt phải kể đến như Browder F. E, Rockafellar R. T, Minty G. J. Bên cạnh các kết quả đặc biệt có ý nghĩa về mặt lý thuyết, toán tử đơn điệu là một trong những công cụ được sử dụng nhiều và rất có hiệu quả trong lĩnh vực toán ứng dụng chẳng hạn như bất đẳng thức biến phân. Nó giúp ích cho việc nghiên cứu ánh xạ dưới gradient và gradient, chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm cho rất nhiều các lớp bài toán cân bằng, bài toán bất đẳng thức biến phân và bài toán tối ưu.

Mục đích của luận văn là trình bày một phương pháp hiệu chỉnh cải biên cho thuật toán điểm gần kề để chứng minh rằng một dãy lặp $\{x_n\}$ hội tụ mạnh đến x^* là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân $\langle Fx^* - u, x^* - p\rangle \leq 0$. Luận văn được trình bày trong hai chương:

Trong Chương 1 chúng tôi xin trình bày về khái niệm không gian Hilbert, một số ví dụ minh họa và bài toán cực tiểu phiếm hàm lồi trong không gian đó. Thuật toán điểm gần kề, khái niệm bài toán đặt không chỉnh và phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov dựa trên phương trình với toán tử đơn điệu cũng được trình bày trong chương này.

Chương 2 dành cho việc mô tả phương pháp hiệu chỉnh cải biên thuật toán điểm gần kề và chứng minh nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân dựa trên một số kết quả bổ trợ.

Chương 1

Một số vấn đề cơ bản

Chương này nhắc lại một số kiến thức của giải tích hàm, giải tích lồi và bài toán đặt không chỉnh. Không gian Hilbert và một số ví dụ được xét trong mục 1.1. Mục 1.2 nhắc lại bài toán cực tiểu phiếm hàm lồi trong không gian Hilbert. Trong mục 1.3 trình bày phương pháp hiệu chỉnh giải phương trình với toán tử đơn điệu. Kiến thức trong chương này được tham khảo trong các tài liệu [1], [2], [3].

1.1 Không gian Hilbert và một số ví dụ

Trong mục này, tôi xin trình bày về khái niệm không gian Hilbert và một số ví dụ về không gian đó.

Định nghĩa 1.1. Cho $\mathcal{H}$ là không gian tuyến tính trên trường $\mathbb{R}$. Một tích vô hướng trong $\mathcal{H}$ là một ánh xạ $\langle .,. \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện sau đây:
i. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ với mọi $x, y \in \mathcal{H}$.
ii. $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ với mọi $x, y, z \in \mathcal{H}$.
iii. $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda \langle x, y\rangle$ với mọi $x, y \in \mathcal{H}; \lambda \in \mathbb{R}$.
iv. $\langle x, x\rangle \geq 0$ với mọi $x \in \mathcal{H}$ và $\langle x, x\rangle = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$.
Số $\langle x, y\rangle$ được gọi là tích vô hướng của hai vectơ x và y. Cặp $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ được gọi là không gian tiền Hilbert (hay còn gọi là không gian Unita).

Từ định nghĩa ta thấy rằng tích vô hướng $\langle \cdot, \cdot \rangle$ chính là một dạng song tuyến tính xác định dương trên $\mathcal{H}$. Khi đó $\mathcal{H}$ được gọi là không gian tiền Hilbert thực.

Định lí 1.1. *Cho $\mathcal{H}$ là không gian tiền Hilbert với $x, y \in \mathcal{H}$, ta luôn có bất đẳng thức sau*

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle .$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi x, y phụ thuộc tuyến tính.

Chứng minh. Hiển nhiên bất đẳng thức đúng với $y = 0$. Giả sử $y \neq 0$. Với mọi số λ, ta đều có

$$\langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle \geq 0$$

tức là

$$\langle x, x \rangle + \lambda \langle y, x \rangle + \overline{\lambda} \langle x, y \rangle + |\lambda|^2 \langle y, y \rangle \geq 0.$$

Lấy $\lambda = -\dfrac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}$, ta được

$$\langle x, x \rangle - \frac{\|\langle x, y \rangle\|^2}{\langle y, y \rangle} \geq 0,$$

từ đó suy ra bất đẳng thức cần chứng minh. □

Định lí 1.2. *Cho $\mathcal{H}$ là không gian tiền Hilbert. Khi đó $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$, $x \in \mathcal{H}$ xác định một chuẩn trên $\mathcal{H}$.*

Chứng minh. Từ điều kiện d) của Định nghĩa 1.1 suy ra rằng nếu $\|x\| = 0$ thì $x = 0$. Từ a) và c) suy ra $\|\lambda x\|^2 = \langle \lambda x, \lambda x \rangle = |\lambda|^2 \|x\|^2$, từ đó $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, với mọi $x \in \mathcal{H}, \lambda \in \mathbb{R}$.

Với mọi $x, y \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle &= \|x\|^2 + \langle y, x \rangle + \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \end{aligned}$$

(vì $\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle = 2Re\langle x, y\rangle \leq 2|\langle x, y\rangle|$).
Do đó, theo bất đẳng thức Schwarz.

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

tức là $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$. □

Như vậy, một không gian tiền Hilbert là một không gian tuyến tính định chuẩn.

Định nghĩa 1.2. Nếu $\mathcal{H}$ là một không gian tiền Hilbert và đầy đủ đối với chuẩn cảm sinh từ tích vô hướng thì được gọi là không gian Hilbert.
Sau đây là một số ví dụ về không gian Hilbert.

Ví dụ 1.1. $\mathbb{R}^n$ là không gian Hilbert thực với tích vô hướng $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, trong đó:

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n, y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Ví dụ 1.2. Xét không gian:

$$l^2 = \left\{ x = (x_n)_n \subset K : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty \right\}.$$

Ta đã biết l^2 là không gian Banach với chuẩn

$$x = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2}. \tag{1.1}$$

Với $x = (x_n)_{n\in\mathbb{R}}$, $y = (y_n)_{n\in\mathbb{R}} \in l^2$, nhờ bất đẳng thức Bunhiacopski ta có:

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \right\|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2 < +\infty.$$

Dễ kiểm tra rằng: $\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ xác định một tích vô hướng trong l^2 và nó cảm sinh (1.1). Vậy l^2 là một không gian Hilbert.

Ví dụ 1.3. Cho (X, A, μ) là một không gian độ đo và $E \in A$. Xét không gian

$$L^2(E, \mu) = \left\{ f : E \to \mathbb{R} \int\limits_E |f|^2 d\mu < \infty \right\}$$

ta đã biết $L^2(E, \mu)$ là một không gian Banach với chuẩn

$$\|f\| = \left(\int\limits_E |f|^2 \, d\mu \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Hơn nữa, với $f, g \in L^2(E, \mu)$, từ bất đẳng thức Hölder về tích phân, ta có

$$\int\limits_E |fg| d\mu \leq \left(\int\limits_E |f|^2 \, d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_E |g|^2 \, d\mu \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

Ta dễ dàng kiểm tra được

$$\langle f, g \rangle = \int\limits_E fg d\mu,$$

xác định một tích vô hướng trong $L^2(E, \mu)$ và $L^2(E, \mu)$ là không gian Hilbert thực.

1.2 Bài toán cực tiểu phiếm hàm lồi trong không gian Hilbert

Trước hết ta nhắc lại một số kiến thức của giải tích lồi như tập lồi, hàm lồi, dưới vi phân,...

Định nghĩa 1.3. Một tập $C \subseteq \mathcal{H}$ được gọi là *tập lồi* nếu

$$\forall x, y \in C, \quad \forall \lambda \in [0, 1] \Rightarrow \lambda x + (1 - \lambda) y \in C.$$

Định nghĩa 1.4. i. Một tập $C \subseteq \mathcal{H}$ được gọi là *nón có đỉnh tại 0* nếu

$$\forall x \in C, \quad \forall \lambda > 0 \Rightarrow \lambda x \in C.$$