ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC**

**NGUYỄN CÔNG CÒN**

# VỀ MỘT VÀI LOẠI SỐ ĐẶC BIỆT

**LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC**

**Thái Nguyên - 2015**

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC**

**NGUYỄN CÔNG CÒN**

# VỀ MỘT VÀI LOẠI SỐ ĐẶC BIỆT

**Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp**
**Mã số: 60 46 01 13**

**LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC**

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

**PGS.TS. NÔNG QUỐC CHINH**

**Thái Nguyên - 2015**

# Mục lục

# Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc với PGS.TS. Nông Quốc Chinh, đã trực tiếp hướng dẫn tận tình và động viên tác giả trong suốt thời gian nghiên cứu vừa qua.

Xin chân thành cảm ơn tới các thầy, cô giáo trong Khoa Toán - Tin, Phòng Đào tạo, các bạn học viên lớp Cao học Toán K7D trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, và các bạn đồng nghiệp đã tạo điều kiện thuận lợi, động viên tác giả trong quá trình học tập và nghiên cứu tại trường.

Tác giả cũng xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới gia đình và người thân luôn khuyến khích, động viên tác giả trong suốt quá trình học tập và làm luận văn.

Mặc dù có nhiều cố gắng nhưng luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót và hạn chế. Tác giả mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu của các thầy cô và bạn đọc để luận văn được hoàn thiện hơn.

***Thái Nguyên, 2015*** **Nguyễn Công Còn**

*Học viên Cao học Toán K7D,*

*Trường ĐH Khoa học - ĐH Thái Nguyên*

# Một số ký hiệu

| | |
|---|---|
| $C_k^n = \binom{n}{k}$ | Tổ hợp chập $k$ của $n$ |
| $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right]$ | Số Stirling loại 1 |
| $\left\{\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\}$ | Số Stirling loại 2 |
| $\left\langle\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\rangle$ | Số Euler bậc 1 |
| $\left\langle\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\rangle^{(2)}$ | Số Euler bậc 2 |
| $H_n$ | Số Harmonic thứ $n$ |
| $F_n$ | Số Fibonacci thứ $n$ |

# Mở đầu

Số học luôn được mệnh danh là nữ hoàng của toán học, bởi trong nó chứa đựng nhiều vẻ đẹp của tư duy logic. Việc nghiên cứu các loại số có tính chất đặc biệt như số nguyên tố, số Bernoulli, số Hoàn hảo, .v.v... luôn là một đề tài hấp dẫn đối với những người yêu toán xưa và nay. Mục tiêu của luận văn này là trình bày một số kết quả về một vài số đặc biệt đó là số Stirling, số Euler, số Harmonic, số Fibonacci và một vài ứng dụng của chúng trong toán phổ thông.

Luận văn được trình bày thành 2 chương chính với nội dung cụ thể là:

Chương 1 trình bày các kiến thức cơ bản có liên quan cần sử dụng cho chương 2.

Chương 2 trình bày các khái niệm, tính chất, định lý, hệ quả về các số Stirling, Euler, Harmonic, Fibonacci và một số công thức biểu thị mối quan hệ giữa các số đó, ứng dụng của chúng trong toán phổ thông. Sau một thời gian nghiên cứu luận văn đã được hoàn thành.

Mặc dù tác giả đã hết sức cố gắng, tuy nhiên luận văn vẫn không tránh khỏi những sai sót, tác giả xin tiếp thu các ý kiến góp ý của các thầy cô giáo và các bạn đồng nghiệp. Chúng tôi xin chân thành cảm ơn.

*Thái Nguyên, ngày 20 tháng 11 năm 2015*

**Nguyễn Công Còn**

Email: `nguyencongcon@gmail.com`

# Chương 1

# Kiến thức chuẩn bị

## 1.1 Định nghĩa và ví dụ

**Định nghĩa 1.1.1.** Số tập con có $k$ phần tử của tập $n$ phần tử, kí hiệu $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ và được gọi là tổ hợp chập $k$ của $n$.

**Ví dụ 1.1.1.** Có 6 tập con có 2 phần tử của tập $\{1, 2, 3, 4\}$ đó là

$$\{1, 2\}, \quad \{1, 3\}, \quad \{1, 4\}, \quad \{2, 3\}, \quad \{2, 4\}, \quad \{3, 4\}.$$

Do vậy $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 6$.

**Định lí 1.1.1.** *Cho $n, k$ là các số nguyên dương và $0 \le k \le n$. Khi đó*

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!.(n-k)!}. \tag{1.1}$$

*Chứng minh.* Đầu tiên, tính số dãy có $k$ phần tử: có $n$ cách chọn phần tử thứ nhất, có $n-1$ cách chọn phần tử thứ hai, ..., có $n-k+1$ cách chọn phần tử thứ $k$. Do vậy có tất cả $n(n-1)\dots(n-k+1)$ cách chọn. Vì mỗi tập con có $k$ phần tử có $k!$ cách sắp thứ tự khác nhau. Do đó

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!.(n-k)!}.$$

$\square$

## 1.2 Một số tính chất

**Định lí 1.2.1.** *Cho $n$ và $k$ là các số nguyên bất kì sao cho $0 \leq k \leq n$. Khi đó*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}. \tag{1.2}$$

*Chứng minh.* Theo định lý 1.1.1, ta có

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-k)!}{(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}.$$

□

Đặc biệt $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ và $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n.$

**Định lí 1.2.2.** *Công thức truy hồi*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \quad n, k > 0. \tag{1.3}$$

*Chứng minh.* Ta có

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!} \\
&= \frac{(n-1)!k}{(n-k)!k!} + \frac{(n-1)!(n-k)}{(n-k)!k!} \\
&= \frac{(n-1)![k+(n-k)]}{(n-k)!k!} \\
&= \frac{(n-1)!n}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \\
&= \binom{n}{k}.
\end{aligned}$$

Định lý được chứng minh. □

**Định lí 1.2.3** (Định lý nhị thức)**.**

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k. \tag{1.4}$$

*Chứng minh.* Chứng minh bằng quy nạp trên $n$. Dễ dàng kiểm tra định lý đúng với $n = 0, 1, 2$.

Giả sử định lý đúng với $n-1$, tức là

$$(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{n-1-k} y^k.$$

Từ giả thiết quy nạp và $(1.3)$, ta có

$$\begin{aligned}
(x+y)^n &= (x+y)(x+y)^{n-1} \\
&= (x+y) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{n-1-k} y^k \\
&= x \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{n-1-k} y^k + y \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{n-1-k} y^k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{n-k} y^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{n-1-k} y^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{n-k} y^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^{n-k} y^k \\
&= \binom{n-1}{0} x^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{n-k} y^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^{n-k} y^k \\
&\qquad + \binom{n-1}{n-1} y^n \\
&= \binom{n-1}{0} x^n + \sum_{k=1}^{n-1} \left[ \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right] x^{n-k} y^k + \binom{n-1}{n-1} y^n
\end{aligned}$$

$$= \binom{n-1}{0}x^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} x^k y^k + \binom{n-1}{n-1}y^n$$
$$= \binom{n}{0}x^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k + \binom{n}{n}y^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

$\square$

Sau đây là bảng các giá trị của $\binom{n}{k}$ với $0 \leq k, n \leq 10$ và được gọi là tam giác Pascal.

| n | $\binom{n}{0}$ | $\binom{n}{1}$ | $\binom{n}{2}$ | $\binom{n}{3}$ | $\binom{n}{4}$ | $\binom{n}{5}$ | $\binom{n}{6}$ | $\binom{n}{7}$ | $\binom{n}{8}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | | | | |
| 2 | 1 | 2 | 1 | | | | | | |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | | | | | |
| 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | | |
| 5 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | | |
| 6 | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | | |
| 7 | 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 21 | 1 | |
| 8 | 1 | 8 | 28 | 56 | 70 | 56 | 28 | 8 | 1 |

Bảng 1.1: Tam giác Pascal.