ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC
................***...............

NGUYỄN ĐÌNH CỨ

ĐẠO HÀM LIÊN TIẾP VÀ CÁC DÃY SỐ NGUYÊN

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - NĂM 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC
..............***.............

NGUYỄN ĐÌNH CỨ

ĐẠO HÀM LIÊN TIẾP VÀ CÁC DÃY SỐ NGUYÊN

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60 46 01 13

Người hướng dẫn khoa học
GS. TSKH. HÀ HUY KHOÁI

THÁI NGUYÊN - NĂM 2015

Mục lục

Mở đầu

Các vấn đề liên quan đến dãy số là một phần quan trọng của Đại số và Giải tích Toán học. Đây là một mảng kiến thức khó trong Toán học sơ cấp. Đối với các học sinh và những ai yêu thích mảng toán học về dãy số và số học thường phải đối mặt với nhiều dạng toán loại toán khó liên quan đến vấn đề này. Vì vậy, để giải được các bài toán về dãy số đòi hỏi người làm toán phải có kiến thức tổng hợp về Số học, Đại số, Giải tích.

Dãy số có vị trí đặc biệt trong toán học không chỉ như là những đối tượng nghiên cứu thuần túy mà còn đóng vai trò như là một công cụ đắc lực của các mô hình rời rạc của giải tích trong lí thuyết phương trình, lí thuyết xấp xỉ, lí thuyết biểu diễn.

Dãy số nguyên là một phần quan trọng trong lí thuyết của dãy số. Các bài toán về dãy số nguyên thường rất đa dạng và phức tạp. Trong nhiều trường hợp dãy số chỉ là cái bề ngoài còn bản chất của bài toán lại là bài toán số học. Do vậy, để giải quyết được những bài toán khó về dãy số nguyên ta cần có những phương pháp hữu hiệu. Một trong những phương pháp đó là sử dụng công cụ đạo hàm.

Đạo hàm không chỉ là một khái niệm và là công cụ mạnh để giải các bài toán của giải tích mà nó còn được sử dụng để nghiên cứu các bài toán về dãy số.

Mục đích chính của luận văn này là trình bày một số nghiên cứu gần đây về phép tính đạo hàm liên tiếp của các hàm số dạng $\dfrac{1}{f}$ và hàm $\dfrac{h}{f}$ và vận dụng những kiến thức này vào nghiên cứu các dãy số nguyên.

Ngoài phần mở đầu, kết luận và tài liệu tham khảo, nội dung của luận văn được trình bày gồm hai chương.

Chương I: Đạo liên tiếp của các hàm $\dfrac{1}{f}$ và hàm $\dfrac{h}{f}$. Chương này trình bày một số kiến thức chuẩn bị như: Sự phân hoạch của một số nguyên và các kí hiệu. Nhắc lại công thức Faá di Bruno về sự khả vi của hàm $g \circ f$, xây dựng công thức tính đạo hàm liên tiếp của hàm $\dfrac{1}{f}$ và hàm $\dfrac{h}{f}$. Trình bày các tính chất của đa thức hệ số nguyên P_n và Q_n.

Chương II: Một số kết quả về dãy số nguyên A_n. Chương này trình bày kết quả tiệm cận về dãy số nguyên A_n và đưa ra một số công thức gần đúng về dãy số nguyên A_n.

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của GS.TSKH Hà Huy Khoái - Trường Đại học Thăng Long. Thầy là người đã dành nhiều thời gian tận tình hướng dẫn và giúp đỡ tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu làm luận văn. Tôi xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy.

Tôi cũng xin gửi tới các Thầy cô trong Khoa Toán trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, cũng như các thầy cô tham gia giảng dạy khóa Cao học Toán 2013 - 2015 lời cảm ơn sâu sắc về công lao dạy dỗ trong suốt quá trình giáo dục và đào tạo của nhà trường. Cuối cùng, tôi cũng xin gửi lời cảm ơn tới tập thể lớp Cao học Toán lớp Q khóa 6/2013 - 6/2015 của trường Đại học Khoa học đã giúp đỡ và động viên tôi trong quá trình học tập và làm luận văn.

Thái Nguyên, tháng 5 năm 2015

Tác giả

Nguyễn Đình Cứ

Chương 1

CÁC ĐẠO HÀM LIÊN TIẾP CỦA HÀM $\frac{1}{f(x)}$ VÀ HÀM $\frac{h(x)}{f(x)}$

Nội dung chính của chương là xây dựng công thức tính đạo hàm liên tiếp của hàm $\dfrac{1}{f(x)}$ và hàm $\dfrac{h(x)}{f(x)}$.

Để xây dựng được các công thức trên, tôi giới thiệu công thức Faá di Bruno và dùng công thức này trong nghiên cứu các đạo hàm liên tiếp của hàm $\dfrac{1}{f(x)}$. Để thiết lập công thức Faá di Bruno ta cần một số ký hiệu về phân hoạch và hệ số đa thức. Các ký hiệu này là do Vella [5] đưa ra.

1.1 Phân hoạch nguyên và các kí hiệu

Trong phần này giới thiệu một số kí hiệu về các phân hoạch và hệ số đa thức. Bây giờ ta giải thích các kí hiệu này.

Phân hoạch π của số nguyên dương n là phép biểu diễn n thành tổng của các số nguyên dương.

Chẳng hạn như, ta có các phân hoạch π của 4 là

$$4 = 1 + 1 + 1 + 1,$$

$$4 = 1 + 1 + 2,$$

$$4 = 1 + 3,$$

$$4 = 2 + 2.$$

Trong phân hoạch π của n, $n = p_1 + p_2 + ... + p_m$, mỗi p_i $i = 1, 2, ..., m$ gọi là các số hạng hay là các bộ phận của phân hoạch. Ta không phân biệt về thứ tự của các số hạng trong phân hoạch. Chẳng hạn như, trong phân hoạch π của 4 thì $4 = 1 + 1 + 2$, $4 = 1 + 2 + 1$ và $4 = 2 + 1 + 1$ được xem là như nhau.

Số phân hoạch π của n kí hiệu là $p(n)$. Số các số hạng của của phân hoạch π kí hiệu là $l(\pi)$. Vì vậy, với $n = p_1 + p_2 + ... + p_m$ thì $l(\pi) = m$.

Xét phân hoạch π của 55 như sau

$$55 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 6 + 6 + 7 + 7 + 7 + 10.$$

Ta có $l(\pi) = 15$.

Hơn nữa, phân hoạch π của n có thể được viết ở dạng $\pi = \{p_1, p_2, ..., p_m\}$. Ví dụ như phân hoạch π của 55 ta viết là

$$\pi = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 6, 6, 7, 7, 7, 10\}.$$

Với mỗi i $(1 \le i \le n)$ số lần i xuất hiện như một phần phân hoạch π của n kí hiệu là π_i và gọi là tính bội của phần i trong π. Chẳng hạn như, trong phân hoạch π của 55 ta có $\pi_1 = 6, \pi_2 = 3$ và $\pi_3 = 0$.

Như vậy

$$l(\pi) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i.$$

Kí hiệu tiêu chuẩn cho phân hoạch là

$$\pi = [1^{\pi_1}, 2^{\pi_2}, ..., n^{\pi_n}]$$

với các số hạng có tính bội bằng 0 thì bỏ qua không lấy. Chẳng hạn như, trong kí hiệu tiêu chuẩn thì phân hoạch π của 55 xét ở trên là

$$\pi = \left[1^6, 2^3, 6^2, 7^3, 10^1\right].$$

Để ý rằng $\{\pi_1, \pi_2, ..., \pi_n\}$ là phân hoạch của $l(\pi) = 15$. Ta gọi phân hoạch này là phân hoạch dẫn xuất của π, kí hiệu là $\delta(\pi)$.

Chẳng hạn như, phân hoạch dẫn xuất $\delta(\pi)$ của phân hoạch π của 55 là phân hoạch của $l(\pi) = 15$ sau

$$\delta(\pi) = \{1, 2, 3, 3, 6\} = \left[1^1, 2^1, 3^2, 6^1\right].$$

Xét phân hoạch $\pi = \{p_1, p_2, ..., p_m\}$ của n. Chúng ta dùng kí hiệu $\pi! = \prod\limits_{i=1}^{m} (p_i!)$ và dùng kí hiệu $\binom{n}{\pi}$ cho hệ số đa thức

$$\begin{pmatrix} n \\ p_1, p_2, \ldots, \mathrm{p}_m \end{pmatrix} = \frac{n!}{\prod\limits_{i=1}^{n} (p_i!)}.$$

Đó là

$$\begin{pmatrix} n \\ p_1, p_2, \ldots, \mathrm{p}_m \end{pmatrix} = \binom{n}{\pi} = \frac{n!}{\pi!}.$$

Trong các phần tiếp theo sử dụng các ký hiệu đã giới thiệu ở trên chúng tôi trình bày công thức Faá di Bruno và dùng công thức này trong nghiên cứu các đạo hàm liên tiếp của hàm $\dfrac{1}{f(x)}$ và giới thiệu một số dãy số nguyên liên kết với các đạo hàm liên tiếp này.

1.2 Đạo hàm liên tiếp của hàm $\frac{1}{f(x)}$

Trong định lí sau thiết lập một cách rất ngắn gọn và có ích công thức Faá di Bruno. Phương pháp thiết lập này là của Vella [5].

Định lí 1.2.1. *Giả sử $y = g(u)$ và $u = f(x)$ khả vi đến cấp n. Khi đó hàm hợp $y = (g \circ f)(x)$ cũng khả vi đến cấp n và*

$$(g \circ f)^{(n)}(x) = \sum_{\pi \in \Omega_n} \frac{\binom{n}{\pi}}{\delta(\pi)!} . g^{(l(\pi))} \circ f(x) \prod_{i=1}^{n} \left[f^{(i)}(x)\right]^{\pi_i} \tag{1.1}$$

trong đó Ω_n là tập tất cả các phân hoạch của n.

Nếu $f = f(x)$ thì ta quy ước $f = f^{(0)}$.

Bây giờ, xét hàm

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f} = \left(\frac{1}{f}\right)^{(0)}. \tag{1.2}$$

Ta có định lí tổng quát sau.

Định lí 1.2.2. *Các đạo hàm liên tiếp của hàm (1.2) thỏa mãn công thức sau*

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{(n)} = \frac{P_n}{f^{n+1}}, (n \geq 0) \tag{1.3}$$

trong đó P_n *là đa thức hệ số nguyên của các biến số* $f, f^{(1)}, ..., f^{(n)}$.

Nếu $n = 0$ *thì*

$$P_0 = 1, \tag{1.4}$$

và nếu $n \geq 1$ *thì*

$$P_n = \sum_{\pi \in \Omega_n} (-1)^{l(\pi)} \binom{n}{\pi} \binom{l(\pi)}{\delta(\pi)} . f(x)^{n-l(\pi)} . \prod_{i=1}^{n} \left[f^{(i)}(x) \right]^{\pi_i}$$

$$= \sum_{\pi \in \Omega_n} (-1)^{l(\pi)} \binom{n}{\pi} \binom{l(\pi)}{\delta(\pi)} . f^{n-l(\pi)} . \prod_{i=1}^{n} \left[f^{(i)} \right]^{\pi_i} . \tag{1.5}$$

Chứng minh. Đặt $g(u) = \dfrac{1}{u} = u^{-1}$. Lưu ý rằng

$$g^{(n)}(u) = \frac{(-1)^n n!}{u^{n+1}}. \tag{1.6}$$

Thế phương trình (1.6) vào phương trình (1.1) ta nhận được

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{(n)} = (g \circ f)^{(n)}(x) = \sum_{\pi \in \Omega_n} \frac{\binom{n}{\pi}}{\delta(\pi)!} . \frac{(-1)^{l(\pi)} l(\pi)!}{f(x)^{l(\pi)+1}} . \prod_{i=1}^{n} \left[f^{(i)}(x) \right]^{\pi_i}$$

$$= \sum_{\pi\in\Omega(n)} \frac{\binom{n}{\pi}}{\delta(\pi)!}.\frac{(-1)^{l(\pi)} l(\pi)}{f(x)^{n+1}}.f(x)^{n-l(\pi)}.\prod_{i=1}^{n}\left[f^{(i)}(x)\right]^{\pi_i}$$

$$= \sum_{\pi\in\Omega_n} \binom{n}{\pi}\binom{l(\pi)}{\delta(\pi)}.\frac{(-1)^{l(\pi)}}{f(x)^{n+1}}.f(x)^{n-l(\pi)}.\prod_{i=1}^{n}\left[f^{(i)}(x)\right]^{\pi_i}$$

$$= \frac{\sum\limits_{\pi\in\Omega_n} (-1)^{l(\pi)}\binom{n}{\pi}\binom{l(\pi)}{\delta(\pi)}.f(x)^{n-l(\pi)}.\prod\limits_{i=1}^{n}\left[f^{(i)}(x)\right]^{\pi_i}}{f(x)^{n+1}} \qquad (1.7)$$

$$= \frac{P_n}{f^{n+1}}.$$

□

Sử dụng (1.5) ta được những đa thức P_n đầu tiên.

$$P_1 = -f^{(1)}(x) = -f^{(1)} \qquad (1.8)$$

$$P_2 = -f(x)f^{(2)}(x) + 2f^{(1)}(x)f^{(1)}(x) = -ff^{(2)} + 2f^{(1)}f^{(1)}, \qquad (1.9)$$

$$P_3 = -fff^{(3)} + 6ff^{(1)}f^{(2)} - 6f^{(1)}f^{(1)}f^{(1)}, \qquad (1.10)$$

$$\begin{aligned} P_4 = &-ffff^{(4)} + 8fff^{(1)}f^{(3)} + 6fff^{(2)}f^{(2)} - 36ff^{(1)}f^{(1)}f^{(2)} \\ &+24f^{(1)}f^{(1)}f^{(1)}f^{(1)}, \end{aligned} \qquad (1.11)$$

$$\begin{aligned} P_5 = &-fffff^{(5)} + 10ffff^{(1)}f^{(4)} - 60fff^{(1)}f^{(1)}f^{(3)} + 20ffff^{(2)}f^{(3)} \\ &-90fff^{(1)}f^{(2)}f^{(2)} + 240ff^{(1)}f^{(1)}f^{(1)}f^{(2)} - 120f^{(1)}f^{(1)}f^{(1)}f^{(1)}f^{(1)}. \end{aligned} \qquad (1.12)$$

Định lí sau nêu ra một số tính chất chung của đa thức P_n.

Định lí 1.2.3. *Đa thức $P_n\,(n \geq 1)$ có các tính chất sau:*

(i) Mỗi số hạng (hay đơn thức) trong đa thức P_n có n nhân tử và có tổng chỉ số trên là n. Nghĩa là, mỗi đơn thức có dạng $f^{(i_1)}f^{(i_2)}...f^{(i_n)}$ trong đó $i_1 + i_2 + ... + i_n = n$, $(f = f^{(0)})$. Vì vậy, ta có thể thiết lập phép tương ứng