ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN ĐỨC TOÀN THỊNH

MỘT SỐ DẠNG TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN DÃY SỐ TRONG SỐ HỌC

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - NĂM 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN ĐỨC TOÀN THỊNH

MỘT SỐ DẠNG TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN DÃY SỐ TRONG SỐ HỌC

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số 60.46.01.13

Người hướng dẫn khoa học
GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU

THÁI NGUYÊN - NĂM 2015

Mục lục

Mở đầu

Chuyên đề dãy số và các vấn đề liên quan đến dãy số là một phần quan trọng của đại số và giải tích toán học. Dãy số có một vị trí đặc biệt quan trọng trong toán học, không chỉ như là một đối tượng để nghiên cứu mà còn đóng một vai trò như một công cụ đắc lực của các mô hình rời rạc, của giải tích trong lý thuyết phương trình, lý thuyết xấp xỉ, lý thuyết biểu diễn...

Dãy số là một lĩnh vực khó và rất rộng. Để giải được các bài toán về dãy số đòi hỏi người làm toán phải có kiến thức tổng hợp về số học, đại số và giải tích. Các vấn đề liên quan đến dãy số cũng rất đa dạng và cũng có nhiều tài liệu viết về vấn đề này. Tuy nhiên, các tài liệu chủ yếu quan tâm đến các tính chất giải tích của dãy số như giới hạn dãy số, số hạng tổng quát, sự đơn điệu của dãy số, tính bị chặn ... Trong khi đó các vấn đề liên quan đến tính chất số học của dãy số như tính chia hết, tính nguyên, tính chính phương... thì chưa được quan tâm nhiều.

Các bài toán về dãy số nguyên là những bài toán hay và khó. Dãy số nguyên thường xuất hiện trong nhiều kỳ thi học sinh giỏi cấp tỉnh – thành phố, cấp quốc gia, thi Olimpic toán quốc tế và gây không ít khó khăn cho các thí sinh. Sự kết hợp giữa dãy số và tính chất số học có lẽ là lí do mà gây ra khó khăn đó. Trong bài viết này, tôi muốn trình bày một số vấn đề cơ bản và các phương pháp thường sử dụng về dãy số nguyên.

Luận văn với đề tài: "Một số dạng toán liên quan đến dãy số trong số học" có mục đích trình bày một cách hệ thống, chi tiết tính chất số học của dãy số. Đồng thời cũng cho phân loại một số dạng toán thường gặp về dãy số trong số học.

Luận văn được trình bày gồm phần mở đầu và ba chương.

Chương 1. Hệ thống hóa các kiến thức liên quan.

Nội dung chương này nhằm hệ thống lại kiến thức cơ bản nhất về dãy số, số học, phương pháp sai phân sẽ được dùng để giải quyết các bài toán trong các chương sau.

Chương 2. Khảo sát các tính chất số học của dãy số nguyên.

Chương này nhằm giới thiệu một số vấn đề về tính chất số học của dãy

số như tính chia hết, tính chất số nguyên, tính chính phương. Đồng thời nêu ra các phương pháp giải toán và phân tích các bài toán cụ thể.
Chương 3. Một số bài toán về dãy số nguyên trong các kì thi Olimpic.

Mặc dù bản thân đã có những cố gắng vượt bậc, nhưng sẽ không tránh khỏi những khiếm khuyết, rất mong sự góp ý của quý thầy cô và những bạn đọc quan tâm để luận văn được hoàn thiện hơn.

Trong thời gian thực hiện luận văn này, tôi đã nhận được sự chỉ dẫn tận tình, chu đáo của Giáo sư - Tiến sĩ Khoa học Nguyễn Văn Mậu. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc của mình tới thầy đã giúp tôi hoàn thành luận văn.

Tôi chân thành cảm ơn Ban giám hiệu và các bạn đồng nghiệp Trường THPT Trung Giã, các thầy cô trường Đại học Khoa học đã nhiệt tình giúp đỡ tôi trong quá trình học tập và hoàn thành luận văn này.

Tác giả

Chương 1

Hệ thống hóa các kiến thức liên quan

Hệ thống hóa kiến thức cơ bản về dãy số, số học, phương pháp sai phân sẽ được dùng để giải quyết các bài toán trong các chương sau. Nội dung chương chủ yếu được lấy từ các tài liệu [2], [3], [4].

1.1 Một số tính chất cơ bản của dãy số

1.1.1 Các khái niệm cơ bản về dãy số

Định nghĩa 1.1 ([2]-[4])**.** Mỗi hàm số u xác định trên tập các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số vô hạn (gọi tắt là dãy số). Kí hiệu:

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N}^* &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto u(n) \end{aligned}$$

Dãy số thường được viết dưới dạng khai triển: $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$
trong đó $u_n = u(n)$ và gọi u_1 là số hạng đầu, u_n là số hạng thứ n và là số hạng tổng quát của dãy số.

Mỗi hàm số u xác định trên tập $M = \{1, 2, 3, \ldots, m\}$ với $m \in \mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số hữu hạn.

Dạng khai triển của nó là $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_m$, trong đó u_1 là số hạng đầu, u_m là số hạng cuối.

Để xác định một dãy số người ta có thể tiến hành theo các cách sau đây.

a) Dãy số cho bằng công thức của số hạng tổng quát.

b) Dãy số cho bằng phương pháp truy hồi.

c) Dãy số cho bằng phương pháp mô tả.

1.1.2 Một vài dãy số đặc biệt

a) Cấp số cộng

Định nghĩa 1.2. Dãy số (u_n) thỏa mãn điều kiện

$$u_1 - u_0 = u_2 - u_1 = \cdots = u_{n+1} - u_n = \dots$$

được gọi là một cấp số cộng.

Khi dãy số (u_n) lập thành một cấp số cộng thì hiệu $d = u_1 - u_0$ được gọi là công sai của cấp số cộng đã cho.

• Một số tính chất của cấp số cộng.

i) $u_n = u_1 + (n-1)d$, với mọi $n = 1, 2, 3, \dots$

ii) $u_k = \dfrac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$, với mọi $k = 2, 3, \dots$.

iii) Cho cấp số cộng hữu hạn $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_n$. Khi đó ta có

$$u_1 + u_n = u_2 + u_{n-1} = u_3 + u_{n-2} = \dots$$

Một cách tổng quát $u_1 + u_n = u_k + u_{n-k}$ với mọi $k = 2, 3, \dots, n-1$.

• Tổng của một cấp số cộng.

+) Cho cấp cố cộng $u_1, u_2, \dots$ với công sai d.

Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n$ là tổng n số đầu của cấp số cộng. Khi đó ta có

$$S_n = \frac{(u_1 + u_n)n}{2} = \frac{[2u_1 + (n-1)d]n}{2}.$$

+) Vài tổng đặc biệt.

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

b) Cấp số nhân

Định nghĩa 1.3. Dãy số (u_n) được gọi là cấp số nhân với công bội q, $(q \neq 0, q \neq 1)$ nếu như ta có $u_n = u_{n-1}.q$ với mọi $n = 2, 3, \dots$

• Một số tính chất của cấp số nhân.

i) $u_n = u_1.q^{n-1}$ với mọi $n = 1, 2, 3, \dots$

ii) $u_k^2 = u_{k-1}.u_{k+1}$ với mọi $k = 2, 3, \dots$

• Cho cấp số nhân $u_1, u_2, u_3, \dots$ với công bội q. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ là tổng n số hạng đầu của cấp số nhân. Khi đó ta có

$$S_n = \frac{u_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

c) Dãy số Fibonacci

Định nghĩa 1.4. Dãy số (F_n) cho bởi hệ thức truy hồi

$$\begin{cases} F_1 = F_2 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

được gọi là dãy số Fibonacci.

Bằng phương pháp sai phân có thể tìm được công thức tổng quát của dãy số Fibonacci là

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \text{ (Công thức Binet).}$$

Tính chất 1.1 (Một số tính chất số học của dãy Fibonacci)**.** .

1. $(F_n, F_{n+1}) = 1$ với mọi n.
2. Nếu n chia hết cho m thì F_n chia hết cho F_m.
3. Nếu F_n chia hết cho F_m thì n chia hết cho m với $m > 2$.
4. $(F_n, F_m) = F_d$ với $d = (m, n)$.
5. Nếu $n \geq 5$ và F_n là số nguyên tố thì n cũng là số nguyên tố.
6. $F_{5n} = 5F_n.q_n$ với q_n không chia hết cho 5.
7. $F_n \vdots 5^k \Leftrightarrow n \vdots k$.
8. F_n có tận cùng là 0 khi và chỉ khi $n \vdots 15$.
9. F_n có tận cùng là hai chữ số 0 khi và chỉ khi $n \vdots 150$.

Tính chất 1.2 (Một số hệ thức cơ bản của dãy Fibonacci)**.** .

1. $F_1 + F_2 + ... + F_n = F_{n+2} - 1$.
2. $F_1 + F_3 + ... + F_{2n-1} = F_{2n}$.
3. $F_2 + F_4 + ... + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$.
4. $F_{n-1}.F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$.
5. $F_1^2 + F_2^2 + ... + F_n^2 = F_n.F_{n+1}$.
6. $F_0 - F_1 + F_2 - F_3 + ... - F_{2n-1} + F_2n = F_{2n-1} - 1$.
7. $F_1F_2 + F_2F_3 + ... + F_{2n-1}F_{2n} = F_{2n}^2$.

1.1.3 Dãy tuần hoàn

Trong phần này, ta quan tâm đến hai loại dãy tuần hoàn cơ bản là dãy tuần hoàn cộng tính và dãy tuần hoàn nhân tính.

Định nghĩa 1.5. Dãy (u_n) được gọi là dãy tuần hoàn cộng tính nếu tồn tại số nguyên dương k sao cho

$$u_{n+k} = u_n, \forall \in \mathbb{N}. \tag{1.1}$$

*Số nguyên dương k bé nhất để dãy (u_n) thỏa mãn điều kiện (**??**) được gọi là chu kì cơ sở của dãy.*

Định nghĩa 1.6. Dãy số (u_n) được gọi là một dãy tuần hoàn nhân tính nếu tồn tại số nguyên dương $s(s > 1)$ sao cho

$$u_{sn} = u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.2}$$

*Số nguyên dương s nhỏ nhất để dãy (u_n) thoả mãn (**??**) được gọi là chu kỳ cơ sở của dãy.*

1.2 Phương trình sai phân tuyến tính

Trong phần này ta trình bày một số phương trình sai phân tuyến tính cơ bản với hệ số hằng số, có nghiệm là các số thực và cách giải chúng.

Định nghĩa 1.7. Phương trình sai phân (cấp k) là một hệ tuyến tính chứa sai phân các cấp tới k.

$$f\left(y_n; \Delta y_n; \Delta^2 y_n; \ldots; \Delta^k y_n\right) = 0. \tag{1.3}$$

Vì sai phân các cấp đều có thể biểu diễn theo giá trị của hàm số nên (**??**) có dạng

$$a_0 y_{n+k} + a_1 y_{n+k-1} + \cdots + a_k y_n = f\left(n\right). \tag{1.4}$$

trong đó $a_0; a_1; \ldots; a_k; f(n)$ đã biết, còn $y_n, y_{n+1}, \ldots, y_{n+k}$ là các giá trị chưa biết.

• Phương trình (**??**) được gọi là phương trình sai phân tuyến tính cấp k.

• Nếu $f(n) = 0$ thì phương trình (**??**) có dạng

$$a_0 y_{n+k} + a_1 y_{n+k-1} + \cdots + a_k y_n = 0. \tag{1.5}$$

và được gọi là phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất cấp k.

• Nếu $f(n) \neq 0$ thì (**??**) được gọi là phương trình sai phân tuyến tính không thuần nhất.

• Nghiệm của phương trình sai phân.

+) Hàm số y_n biến n thỏa mãn (**??**) được gọi là nghiệm của phương trình sai phân tuyến tính (**??**).

+) Hàm số $\widehat{y}_n$ phụ thuộc k tham số thỏa mãn (**??**) được gọi là nghiệm tổng quát của (**??**).

+) Một nghiệm y_n^* thỏa mãn (**??**) được gọi là một nghiệm riêng của (**??**).

a) Phương trình sai phân tuyến tính bậc nhất

Bài toán 1.1. Giải phương trình sai phân tuyến tính bậc nhất (cấp một)

$$u_1 = \alpha, au_{n+1} + bu_n = f(n), n \in \mathbb{N}^*, \tag{1.6}$$

trong đó a, b, α là các hằng số $(a, b \neq 0)$ và $f(n)$ là biểu thức của n cho trước.

Nhận xét rằng các cấp số cơ bản là những dạng đặc biệt của phương trình sai phân tuyến tính.

Lời giải.
Bước 1. Giải phương trình sai phân thuần nhất tương ứng.

+) Giải phương trình đặc trưng $a\lambda + b = 0$ để tìm λ.

+) Tìm nhiệm của phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất tương ứng $au_{n+1} + bu_n = 0$ dưới dạng $\widehat{u}_n = c\lambda^n$ (c là hằng số).

Bước 2. Tìm một nghiệm riêng u_n^* của phương trình không thuần nhất.
Bước 3. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình (**??**) là $u_n = u_n^* + \widehat{u}_n$.

Sau đây ta trình bày phương pháp tìm nghiệm riêng.
Trường hợp 1. Nếu $f(n) = P_m(n)$ là đa thức bậc m đối với n. Khi đó

+) Nếu $\lambda \neq 1$ thì ta chọn $u_n^* = Q_m(n)$ cũng là đa thức bậc m đối với n.

+) Nếu $\lambda = 1$ thì ta chọn $u_n^* = nQ_m(n)$, trong đó $Q_m(n)$ cũng là đa thức bậc m đối với n.

Trường hợp 2. Nếu $f(n) = p.\beta^n \quad (p; \beta \neq 0)$. Khi đó

+) Nếu $\lambda \neq \beta$ thì ta chọn $u_n^* = d.\beta^n \quad (d \in \mathbb{R})$.

+) Nếu $\lambda = \beta$ thì ta chọn $u_n^* = d.n.\beta^n \quad (d \in \mathbb{R})$.

Trường hợp 3. Nếu $f(n) = \sum\limits_{k=1}^{m} f_k(n)$. Khi đó, ta chọn nghiệm riêng u_n^* dưới dạng $u_n^* = \sum\limits_{k=1}^{m} x_{nk}^*$, trong đó x_{nk}^* tương ứng là nghiệm riêng của phương trình sai phân (**??**) với $VP = f_k(n)$.

Ví dụ 1.1. Giải phương trình sai phân

$$\begin{cases} x_0 = 7 \\ x_{n+1} = 15x_n - 14n + 1 \end{cases} \tag{1.7}$$

Lời giải.