ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN KHẮC HIẾN

CÁC BÀI TOÁN CỰC TRỊ TRONG LỚP HÀM MŨ VÀ LOGARIT

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN KHẮC HIẾN

CÁC BÀI TOÁN CỰC TRỊ TRONG LỚP HÀM MŨ VÀ LOGARIT

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 60 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

GS.TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU

Thái Nguyên - 2015

Mục lục

Lời cảm ơn

Luận văn được thực hiện và hoàn thành tại Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn khoa học của GS.TSKH. Nguyễn văn Mậu. Qua đây em xin được gửi lời cảm ơn sâu sắc đến Giáo sư, người hướng dẫn khoa học của mình, GS.TSKH. Nguyễn văn Mậu, người đã đưa ra đề tài và dành nhiều thời gian tận tình hướng dẫn em trong suốt quá trình nghiên cứu. Em xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến Thầy.

Em xin trân trọng cảm ơn các thầy cô giảng dạy và Phòng Đào tạo thuộc Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã tạo mọi điều kiện tốt nhất để em được theo học lớp học. Đồng thời tôi xin gửi lời cảm ơn tới tập thể lớp Cao học Toán D khóa 1/2014 - 1/2016 đã động viên giúp đỡ tôi trong quá trình học tập và làm luận văn này.

Tôi xin chân thành cảm ơn Sở Giáo dục và Đào tạo Hải Dương, Ban Giám hiệu và các đồng nghiệp Trường THPT Cẩm Giàng - Cẩm Giàng - Hải Dương, gia đình và bạn bè đã tạo điều kiện cho tôi học tập và hoàn thành kế hoạch học tập.

Thái Nguyên, ngày 30 tháng 10 năm 2015

Nguyễn Khắc Hiến

Lời nói đầu

1. Lý do chọn đề tài

Các bài toán về cực trị và bất đẳng thức là một trong những nội dung quan trọng của giải tích và đại số. Rất nhiều dạng toán khác cũng quy về việc ước lượng, tìm cực trị của hàm số. Học sinh thường gặp khó khăn khi giải quyết các bài toán dạng này.

Trong nhiều kỳ thi học sinh giỏi quốc gia, thi Olympic toán quốc gia và quốc tế, Olympic toán sinh viên giữa các trường đại học, cao đẳng rất hay đề cập đến các bài toán về cực trị, bất đẳng thức.

Tuy nhiên, kiến thức về cực trị và bất đẳng thức lại vô cùng rộng. Đã có rất nhiều giáo trình, tài liệu, đề tài đề cập đến vấn đề này. Đặc biệt là các bài toán cực trị và bất đẳng thức có liên quan đến hàm mũ và logarit.

Việc giải các bài toán dạng này đòi hỏi học sinh phải nắm vững các kiến thức cơ bản về các lớp hàm này đồng thời nắm được các kiến thức liên quan và phải biết vận dụng một cách sáng tạo, logic.

Chính vì lý do trên mà tôi chọn đề tài "Các bài toán cực trị trong lớp hàm mũ và logarit" nhằm hệ thống một số phương pháp tìm cực trị trong các lớp hàm này.

2. Mục đích nghiên cứu

Hệ thống hóa các dạng bài toán cực trị trong lớp hàm mũ và logarit cùng với phương pháp giải tương ứng.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Các bài toán cực trị trong lớp hàm mũ và logarit, đồng thời giải quyết một số bài toán về bất đẳng thức, bất phương trình mũ và logarit.

4. Phương pháp nghiên cứu

Tham khảo, phân tích, hệ thống hóa các tài liệu, chuyên đề nhằm rút ra các kết luận có tính khái quát.

5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài

Đề tài tạo nên một tư liệu lý thú về lớp hàm mũ và logarit, phù hợp cho việc giảng dạy, bồi dưỡng học sinh khá giỏi.

6. Cấu trúc của luận văn

Luận văn gồm ba chương và phần mở đầu, kết luận.

Chương 1. Một số kiến thức chuẩn bị. Trong chương này, tác giả trình bày về các tính chất cơ bản của hàm mũ và logarit, các đặc trưng cơ bản của các lớp hàm này đồng thời trình bày về một số bất đẳng thức, các định lý cơ bản của đại số và giải tích.

Chương 2. Trình bày về ứng dụng của các bất đẳng thức trong tìm cực trị các lớp hàm mũ , sử dụng đạo hàm để tìm cực trị của các lớp hàm này, cùng với đó là các bất đẳng thức, các cực trị có liên quan Chương 3. Trình bày các ứng dụng của các định lý đến các bài toán cực trị hàm logarit, việc sử dụng đạo hàm để tìm cực trị. Ngoài ra là các vấn đề có liên quan đến hàm logarit.

Thái Nguyên, ngày 28 tháng 11 năm 2015

Học viên: **Nguyễn Khắc Hiến**

Chương 1

Một số kiến thức bổ trợ

1.1 Tính chất cơ bản của hàm mũ và logarit

1.1.1 Tính chất cơ bản của hàm mũ

Định nghĩa 1.1. Cho a là số dương bất kỳ, khác 1. Hàm số dạng $y = a^x$ được gọi là hàm số mũ cơ số a.

Xét hàm số mũ $y = a^x, 0 < a \neq 1$ (với $a = 1$ thì hàm số $y = 1^x = 1$ là hàm số hằng).

1. Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

2. Tập giá trị $T = (0, +\infty)$.

3. $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}$; $a^{x_1}.a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$; $(ab)^x = a^x b^x$.

4. $\dfrac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1-x_2}$; $\dfrac{a^x}{b^x} = (\dfrac{a}{b})^x$.

5. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ nếu $a > 1$.

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nếu $0 < a < 1$.

6. Giới hạn và liên tục

(a) Hàm số $y = a^x$ liên tục tại mọi điểm mà nó xác định, tức là $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$.

(b) Ta có

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1.$$

7. Đạo hàm của hàm số mũ

(a) Hàm số $y = a^x$ có đạo hàm tại mọi điểm $x \in \mathbb{R}$ và $(a^x)' = a^x \ln a$ nói riêng ta có $(e^x)' = e^x$.

(b) Nếu hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm trên J (một khoảng của tập số thực) thì hàm số $y = a^{u(x)}$ có đạo hàm trên J và $(a^{u(x)})' = u'(x)a^{u(x)} \ln a$ nói riêng ta có $(e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)}$.

1.1.2 Tính chất cơ bản của hàm logarit

Định nghĩa 1.2. Hàm số $x \to \dfrac{1}{x}$ liên tục trên khoảng $(0, +\infty)$. Với mỗi $x > 0$, ta đặt

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

Số $\ln x$ được gọi là logarit tự nhiên hoặc logarit nêpe của số dương x.

Từ định nghĩa suy ra ngay $\ln 1 = 0$.

Định lý 1.1. Hàm số $\ln : (0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ có đạo hàm, tăng nghiêm ngặt trên $(0, +\infty)$, nhận mọi giá trị trong $\mathbb{R}$ và có các tính chất sau

(a) $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$ với mọi $x \neq 0$.

(b) $(\ln xy) = \ln x + \ln y, x > 0, y > 0$.

(c) $\ln(\dfrac{x}{y}) = \ln x - \ln y, x > 0, y > 0$.

(d) $\ln x^r = r\ln x$, với mọi $x > 0, r \in \mathbb{Q}$.

Chứng minh. Ta có $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x} > 0$ với mọi $x > 0$. Do đó hàm ln tăng nghiêm ngặt trên khoảng $(0, +\infty)$.

a) Hiển nhiên hàm số $x \mapsto \ln|x|$ xác định với mọi $x \neq 0$.
Nếu $x > 0$ thì $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.
Nếu $x < 0$ thì $(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \dfrac{1}{-x}(-1) = \dfrac{1}{x}$.

Vậy $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$ với mọi $x \neq 0$.
b) Cố định $y > 0$ và xét hàm số $x \mapsto \ln(xy)$. Với mọi $x > 0$, ta có

$$(\ln(xy))' = \frac{1}{xy}y = \frac{1}{x}.$$

Do đó

$$\ln(xy) = \ln x + C, x > 0.$$

Với $x = 1$, ta được $C = \ln y$. Từ đó có đẳng thức cần chứng minh.

c) Trong công thức b), với $x = \dfrac{1}{y}$, ta có $\ln\dfrac{1}{y} = -\ln y$. Từ đó suy ra

$$\ln\frac{x}{y} = \ln(x.\frac{1}{y}) = \ln x + \ln\frac{1}{y} = \ln x - \ln y.$$

d) Nếu n là số nguyên dương thì từ b) suy ra

$$\ln x^n = \ln(x.x\ldots x) = \ln x + \ln x + \cdots + \ln x = n\ln x, \;\; x > 0.$$

Nếu $y = \sqrt[n]{x}, x > 0$ thì $y^n = x$. Từ đó $n\ln y = \ln x$, do đó

$$\ln\sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\ln x.$$

Nếu r là một số hữu tỉ dương, $r = \dfrac{p}{q}$ trong đó p, q là hai số nguyên dương