ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN MINH THÚY

MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA LIÊN PHÂN SỐ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN MINH THÚY

MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA LIÊN PHÂN SỐ

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60.46.01.13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
TS. NGUYỄN VĂN HOÀNG

Thái Nguyên - 2015

Mục lục

Danh sách ký hiệu

Trong toàn luận văn, ta dùng những ký hiệu với các ý nghĩa xác định trong bảng dưới đây:

$\mathbb{N}$:	Tập các số tự nhiên
$\mathbb{Z}$:	Tập các số nguyên
$\mathbb{Z}^+$:	Tập các số nguyên dương
$\mathbb{Q}$:	Tập các số hữu tỉ
$\mathbb{R}$:	Tập các số thực
$\mathbb{R} - \mathbb{Q}$:	Tập các số vô tỉ

Danh sách hình vẽ

Mở đầu

Liên phân số được giới thiệu đầu tiên bởi Leonardo Fibonacci trong công trình "Liber abaci" xuất bản năm 1202. Đến thế kỉ thứ 16, Bombelli đã biểu diễn các số thực bởi liên phân số. Sau này, vào thế kỉ thứ 17, Huygens đã sử dụng chúng trong việc xây dựng mô hình hệ thống năng lượng mặt trời. Điều tuyệt vời là liên phân số đã mang lại cách biểu diễn số vô tỉ rất rõ ràng.

Liên phân số là một đối tượng rất quan trọng của Số học với nhiều ứng dụng hay không chỉ trong các lĩnh vực của Toán học mà còn có nhiều ứng dụng trong thực tiễn. Vì vậy, chúng tôi đã chọn đề tài "Một số ứng dụng của liên phân số" nhằm tìm hiểu những ứng dụng của liên phân số vào một số bài toán số học với những ví dụ đơn giản có thể áp dụng cho học sinh phổ thông, đồng thời nghiên cứu các xấp xỉ tốt nhất đối với một số vô tỉ, đặc biệt là việc xem xét liên phân số ở góc độ hình học để hiểu sâu hơn về liên phân số.

Ngoài phần mở đầu, kết luận và tài liệu tham khảo, luận văn gồm hai chương:
Chương 1. Chương này chúng tôi trình bày một số kiến thức cơ bản về liên phân số và một vài ứng dụng phổ biến của nó: giải phương trình đồng dư bậc nhất một ẩn, giải phương trình nghiệm nguyên bậc nhất hai ẩn, ứng dụng liên phân số giải phương trình Pell.
Chương 2. Chương này chúng tôi trình bày cách xấp xỉ một số vô tỉ bởi một số hữu tỉ thông qua các giản phân của liên phân số. Phần thứ nhất của chương này trình bày về hai loại xấp xỉ xấp xỉ tốt nhất loại một và xấp xỉ tốt nhất loại hai của một số vô tỉ dưới góc độ đại số, tính chất của số hữu tỉ đủ gần một số vô tỉ và việc có thể tìm được một số xấp xỉ tốt hơn nữa trong một vài trường hợp đặc biệt. Phần thứ hai của chương trình bày về việc có thể minh họa hình học tính xấp xỉ của số vô tỉ bởi các số hữu tỉ thông qua việc mô tả khoảng cách từ các điểm nguyên (q, p) đến một đường thẳng L có độ nghiêng là số vô tỉ α.

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn và chỉ bảo tận tình của thầy giáo TS. Nguyễn Văn Hoàng - Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên.

Tôi xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc đến Thầy về sự hướng dẫn hiệu quả cùng những kinh nghiệm trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Tôi xin gửi tới các thầy, cô khoa Toán - Tin, phòng Sau Đại học, Trường Đại học Khoa Học - Đại học Thái Nguyên cũng như các thầy giáo, cô giáo tham gia giảng dạy lớp Cao học Toán A khóa 2013 - 2015 lời cảm ơn sâu sắc về công lao dạy dỗ trong suốt quá trình giáo dục, đào tạo của nhà trường. Tôi cũng xin gửi lời cảm ơn đến Ban giám hiệu trường THPT Ngô Quyền - Hạ Long, Quảng Ninh, các bạn bè đồng nghiệp và các bạn học viên đã động viên và giúp đỡ tôi trong quá trình hoàn thành luận văn này.

Cuối cùng, vì điều kiện thời gian nên luận văn không tránh khỏi những thiếu sót, tôi rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của các thầy, cô và các bạn để luận văn được hoàn thiện.

Thái Nguyên, ngày 18 tháng 04 năm 2015

Tác giả

Nguyễn Minh Thúy

Chương 1

Kiến thức cơ bản về liên phân số

Chương này nhằm trình bày những kiến thức cơ bản cần thiết về liên phân số đơn hữu hạn, liên phân số đơn vô hạn và một số áp dụng thông dụng của chúng (giải phương trình nghiệm nguyên, phương trình đồng dư) cũng được trình bày ở chương này giúp cho việc trình bày có tính hệ thống và sáng rõ. Kiến thức của chương này được trình bày dựa trên một số tài liệu [6], [1], [2], [4].

1.1 Liên phân số hữu hạn

Định nghĩa 1.1.1. Một biểu thức có dạng

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ldots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}$$

với $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ trong đó $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ được gọi là một *liên phân số hữu hạn* và ký hiệu là

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n].$$

Trong trường hợp khi $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ thì ta gọi $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ là một *liên phân số đơn hữu hạn.*

Tính chất sau đây cho ta một đặc trưng của một số hữu tỉ qua liên phân số đơn hữu hạn.

Định lý 1.1.2. *Cho $\alpha \in \mathbb{R}$. Khi đó α là một số hữu tỉ nếu và chỉ nếu α có thể biểu diễn được dưới dạng một liên phân số đơn hữu hạn.*

Chứng minh. Giả sử $\alpha = \dfrac{a}{b}$ là số hữu tỉ (với $a, b \in \mathbb{Z}, b > 0$). Khi đó bằng thuật toán Euclid ta có biểu diễn $a = bq_0 + r_1, b = r_1q_1 + r_2, r_1 = r_2q_2 + r_3, \ldots, r_{n-2} = r_{n-1}q_{n-1} + r_n, r_{n-1} = r_nq_n + 0$, trong đó $q_0 \in \mathbb{Z}, q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{N}^*$ và $q_n > 1$. Từ đó

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{r_1}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{r_2}{r_1}} = \ldots = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ldots + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}}}.$$

Suy ra $\dfrac{a}{b} = [q_0; q_1, q_2, \ldots, q_n]$ là một liên phân số đơn hữu hạn. Ngược lại, nếu $\alpha = [q_0; q_1, q_2, \ldots, q_n]$ thì dễ thấy nó là một số hữu tỉ. □

Định nghĩa 1.1.3. Cho $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ là một liên phân số hữu hạn, khi đó liên phân số hữu hạn $c_i = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_i]$ (trong đó $0 \leq i \leq n$) được gọi là *giản phân* thứ i của α.

Định nghĩa 1.1.4. Cho $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ là một liên phân số hữu hạn, ta định nghĩa $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$ và $Q_0, Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ bởi quy tắc truy hồi sau như:

$$P_0 = a_0, P_1 = a_0a_1 + 1$$
$$P_i = a_iP_{i-1} + P_{i-2}, \text{ với } 2 \leq i \leq n;$$

$$Q_0 = 1, Q_1 = a_1$$
$$Q_i = a_iQ_{i-1} + Q_{i-2}, \text{ với } 2 \leq i \leq n.$$

Bổ đề 1.1.5. *Nếu $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ là một liên phân số đơn hữu hạn thì*

$$Q_0 \leq Q_1 < Q_2 < \ldots < Q_n.$$

Chứng minh. Theo Định nghĩa 1.1.4 ta có $Q_0 = 1 \leq Q_1$. Các trường còn lại, khi $i \geq 1$ ta có $a_i \geq 1$, $Q_{i-1} \geq 1$ nên

$$Q_{i+1} = a_{i+1}Q_i + Q_{i-1} \geq 1Q_i + 1 > Q_i.$$

□

Định lý 1.1.6. *Cho $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ là một liên phân số đơn hữu hạn, khi đó giản phân thứ i là $c_i = \dfrac{P_i}{Q_i}$, với mọi $0 \leq i \leq n$.*

Chứng minh. Quy nạp theo i. Khi $i = 0$ ta có $c_0 = a_0 = \frac{P_0}{Q_0}$ (vì $P_0 = a_0, Q_0 = 1$). Khi $i = 1$ ta có $c_1 = [a_0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1} = \frac{P_1}{Q_1}$. Giả sử $i > 1$ và $c_i = \frac{P_i}{Q_i}$. Ta nhận thấy rằng c_{i+1} thu được từ c_i bằng cách thay a_i bởi $a_i + \frac{1}{a_{i+1}}$. Do đó vì

$$c_i = \frac{a_i P_{i-1} + P_{i-2}}{a_i Q_{i-1} + Q_{i-2}}$$

nên ta có

$$\begin{aligned}
c_{i+1} &= \frac{(a_i + \frac{1}{a_{i+1}})P_{i-1} + P_{i-2}}{(a_i + \frac{1}{a_{i+1}})Q_{i-1} + Q_{i-2}} \\
&= \frac{(a_i P_{i-1} + P_{i-2}) + \frac{P_{i-1}}{a_{i+1}}}{(a_i Q_{i-1} + Q_{i-2}) + \frac{Q_{i-1}}{a_{i+1}}} \\
&= \frac{P_i + \frac{P_{i-1}}{a_{i+1}}}{Q_i + \frac{Q_{i-1}}{a_{i+1}}} \\
&= \frac{a_{i+1} P_i + P_{i-1}}{a_{i+1} Q_i + Q_{i-1}} = \frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}}.
\end{aligned}$$

□

Định lý 1.1.7. *Cho $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ là một liên phân số hữu hạn, khi đó*

$$\begin{bmatrix} Q_{m-1} & Q_m \\ P_{m-1} & P_m \end{bmatrix} = \prod_{i=0}^{m} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_i \end{bmatrix},$$

với $1 \leq m \leq n$.

Chứng minh. Quy nạp theo m. Nếu $m = 1$, ta có vế trái là

$$\begin{bmatrix} Q_0 & Q_1 \\ P_0 & P_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a_1 \\ a_0 & a_0 a_1 + 1 \end{bmatrix}$$

trong khi vế phải là

$$\prod_{i=0}^{1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a_1 \\ a_0 & a_0 a_1 + 1 \end{bmatrix}.$$