ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ HOÀNG NGUYÊN

PHƯƠNG PHÁP DYKSTRA LAI GHÉP CHO HAI TOÁN TỬ ĐƠN ĐIỆU

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ HOÀNG NGUYÊN

PHƯƠNG PHÁP DYKSTRA LAI GHÉP CHO HAI TOÁN TỬ ĐƠN ĐIỆU

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 60 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

GS.TS. NGUYỄN BƯỜNG

Thái Nguyên - 2015

Mục lục

Lời cảm ơn

Để hoàn thành được luận văn một cách hoàn chỉnh, tôi luôn nhận được sự hướng dẫn và chỉ bảo tận tình của GS.TS. Nguyễn Bường (Viện Công nghệ Thông tin - Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam). Tôi xin chân thành bày tỏ lòng biết ơn và xin gửi lời tri ân sâu sắc nhất đến thầy.

Tôi xin chân thành cảm ơn Ban lãnh đạo khoa Toán - Tin, phòng Đào tạo, quý thầy cô giảng dạy lớp cao học toán K7Y (01/2014–01/2016) trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên đã tận tình truyền đạt những kiến thức quý báu và tạo điều kiện cho tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu.

Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành nhất tới gia đình, bạn bè, đồng nghiệp những người đã luôn động viên, hỗ trợ và tạo mọi điều kiện cho tôi trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn.

Trong quá trình thực hiện, mặc dù đã rất cố gắng luận văn không tránh khỏi những thiếu sót. Tôi rất mong nhận được sự góp ý của các Thầy, các Cô và các Độc giả quan tâm để luận văn được hoàn thiện hơn.

Xin trân trọng cảm ơn!

Thái Nguyên, 2015 **Nguyễn Thị Hoàng Nguyên**

Học viên Cao học Toán Khóa 01/2014–01/2016,

Trường ĐH Khoa học - ĐH Thái Nguyên

Danh sách ký hiệu

Trong toàn luận văn, ta dùng những ký hiệu với các ý nghĩa xác định trong bảng dưới đây:

$\mathbb{R}$	không gian số thực
H	không gian Hilbert thực
X^*	không gian đối ngẫu của X
$P_C(x)$	phép chiếu trực giao của điểm x trên tập C
$\langle x, y\rangle$	tích vô hướng của hai vectơ x và y
$\|x\|$	chuẩn của vectơ x
$x_n \to x$	x_n hội tụ mạnh đến x
$x_n \rightharpoonup x$	x_n hội tụ yếu x
$x := y$	x được gán bằng y
$spanC$	tổ hợp tuyến tính của C
$\forall$	mọi
$\exists$	tồn tại
$\varnothing$	tập rỗng
Id	ánh xạ đơn vị.

Mở đầu

Toán tử đơn điệu là một trong những công cụ được sử dụng nhiều và rất có hiệu quả trong lĩnh vực toán ứng dụng chẳng hạn như bất đẳng thức biến phân. Nó giúp ích cho việc nghiên cứu ánh xạ dưới gradient và gradient, chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm cho rất nhiều các lớp bài toán cân bằng, bài toán bất đẳng thức biến phân và bài toán tối ưu. Từ bài toán tìm giao điểm của hai không gian con đóng đã được chứng minh bởi nhà toán học Neumann trong thuật toán chiếu luân hướng cổ điển vào năm 1933. Và sau này nhà toán học Dykstra sử dụng phép chiếu lên hai tập đóng lồi của không gian Hilbert để xây dựng phép chiếu lặp lên giao của chúng.

Đề tài của luận văn là trình bày cách tiếp cận đối ngẫu để mở rộng thuật toán của Dykstra nhằm xây dựng toán tử giải cho toán tử tổng hai toán tử đơn điệu cực đại từ các toán tử giải đơn điệu.

Nội dung của luận văn được trình bày trong hai chương. Chương 1 giới thiệu một số kiến thức cơ bản về không gian Hilbert thực, giải tích lồi, phép chiếu trong không gian Hilbert, toán tử đơn điệu, nghiệm của phương trình toán tử đơn điệu và nghiệm của bất đẳng thức biến phân trong không gian Hilbert. Chương 2 gồm hai mục chính. Mục 2.1 nêu bài toán tìm giao điểm của hai không gian con đóng. Mục 2.2 trình bày về phương pháp Dykstra lai ghép cho hai toán tử đơn điệu cực đại.

Qua quá trình hoàn thành luận văn, tác giả nhận thấy rằng luận văn chỉ thể hiện được một phần nhỏ các vấn đề được đề cập trong luận văn. Tuy nhiên, thông qua việc trình bày luận văn tác giả được trau dồi những kiến thức khởi đầu định hướng cho sự tiếp cận các vấn đề sau này.

Thái Nguyên, tháng 11 năm 2015

Nguyễn Thị Hoàng Nguyên

Học viên cao học toán khóa 01/2014 – 01/2016
Chuyên ngành Toán ứng dụng
Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên

Chương 1

Một số vấn đề cơ bản

Trong chương này chúng tôi nhắc lại một số kiến tức cơ bản của giải tích hàm, giải tích lồi, toán tử đơn điệu và bài toán bất đẳng thức biến phân, có liên quan đến nội dung nghiên cứu của đề tài. Các kiến thức trong chương được tham khảo trong các tài liệu [1], [2], [3], [4], [6].

1.1 Không gian Hilbert và các vấn đề liên quan

Trong toàn bộ đề tài, chúng tôi chỉ đề cập đến không gian Hilbert thực, với tích vô hướng $\langle ., . \rangle$ và chuẩn $||.||$. Phép chiếu lên tập con U đóng lồi khác rỗng của H kí hiệu là P_U và $x_n \longrightarrow x$ có nghĩa là dãy x_n hội tụ mạnh đến x.

1.1.1. Định nghĩa và ví dụ

Định nghĩa 1.1. Cho không gian tuyến tính H trên trường số thực $\mathbb{R}$, ta gọi tích vô hướng trên không gian H là một ánh xạ đi từ tích Descartes $H \times H$ vào trường $\mathbb{R}$ ký hiệu $\langle ., . \rangle$ thỏa mãn các điều kiện sau:

a) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle,\ \forall x, y \in H.$

b) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle, \forall x, y, z \in H.$

c) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle, \forall x, y \in\ H,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$

d) $\langle x, x\rangle > 0$ nếu $x \neq 0$ và $\langle x, x\rangle = 0$ nếu $x = 0$.

Nhận xét 1.1. Từ định nghĩa ta suy ra

1) $\langle x, \lambda y\rangle = \lambda\langle y, x\rangle,\ \forall x, y \in H;$

2) $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle, \forall x, y, z \in H;$

Định nghĩa 1.2. Không gian tuyến tính H cùng với một tích vô hướng trên nó được gọi là một không gian tiền Hilbert.

Định lí 1.1. (Bất đẳng thức Schwarz) *Trong không gian tiền Hilbert H, với mọi $x, y \in H$ ta luôn có bất đẳng thức sau:*

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$$

Chứng minh. Với mọi số thực α ta có

$$0 \leq \langle x - \alpha y, x - \alpha y\rangle = \langle x, x\rangle - 2\alpha\langle x, y\rangle + \alpha^2\langle y, y\rangle$$

Nên $\Delta = |\langle x, y\rangle|^2 - \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \leq 0$. Hay $|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$. □

Dấu đẳng thức trong bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi x và y phụ thuộc tuyến tính.

Định lí 1.2. *Cho H là một không gian tiền Hilbert, khi đó H cũng là một không gian tuyến tính định chuẩn với chuẩn được xác định bởi*

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \text{ với mọi } x \in H. \tag{1.1}$$

Chuẩn này được gọi là chuẩn cảm sinh từ tích vô hướng. Ta dễ dàng chứng minh được hàm số $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ với mọi $x \in H$, là một chuẩn trên H. Thật vậy, từ điều kiện d) ta có $||x|| > 0$ nếu $x \neq 0,\ ||x|| = 0$ nếu $x = 0$.

Từ điều kiện a), c) ta suy ra $||\lambda x|| = |\lambda|.||x||$. Từ bất đẳng thức Schwarz và cách định nghĩa chuẩn ta có

$$|\langle x, y\rangle| \leq ||x||.||y||. \tag{1.2}$$

Từ đó

$$\begin{aligned}\langle x+y, x+y\rangle &= \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \\ &\leq ||x||^2 + 2||x||.||y|| + ||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2.\end{aligned}$$

Suy ra $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Định nghĩa 1.3. Nếu H là một không gian tiền Hilbert thực và đầy đủ đối với chuẩn cảm sinh từ tích vô hướng xác định bởi (1.1) thì H được gọi là không gian Hilbert thực.

Ví dụ 1.1. $\mathbb{R}^n$ là không gian Hilbert thực với tích vô hướng

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

trong đó $x = (x_1, x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ và chuẩn cảm sinh

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = (\sum_{k=1}^{n} x_k^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Ví dụ 1.2. Không gian

$$l^2 = \{x = \{x_n\}_n \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty\}$$

là không gian Hilbert với tích vô hướng

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

trong đó $x = (x_n)_{n\in N}$, $y = (y_n)_{n\in N} \in l^2$ và chuẩn cảm sinh

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} = (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2)^{\frac{1}{2}}.$$