ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ KIM CHUNG

PHƯƠNG PHÁP LẶP GIẢI BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN TRÊN TẬP ĐIỂM BẤT ĐỘNG CHUNG CỦA MỘT HỌ ĐẾM ĐƯỢC CÁC ÁNH XẠ KHÔNG GIÃN

THÁI NGUYÊN - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ KIM CHUNG

PHƯƠNG PHÁP LẶP GIẢI BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN TRÊN TẬP ĐIỂM BẤT ĐỘNG CHUNG CỦA MỘT HỌ ĐẾM ĐƯỢC CÁC ÁNH XẠ KHÔNG GIÃN

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 60 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

TẬP THỂ HƯỚNG DẪN:
PGS.TS. PHẠM NGỌC ANH
TS. NGUYỄN THỊ THU THỦY

THÁI NGUYÊN - 2015

Mục lục

Mở đầu

Bất đẳng thức biến phân được nghiên cứu đầu tiên bởi Stampacchia [6], [7] và là một công cụ hữu hiệu để nghiên cứu và giải các bài toán ứng dụng như bài toán cân bằng kinh tế, tài chính, vận tải v.v... vì vậy nó đã trở thành vấn đề thời sự thu hút rất nhiều nhà khoa học quan tâm nghiên cứu.

Một trong những hướng nghiên cứu quan trọng của bất đẳng thức biến phân là việc xây dựng phương pháp giải. Dựa trên tính chất kiểu đơn điệu, đã có rất nhiều phương pháp hiệu quả được các nhà khoa học đưa ra, trong đó tiêu biểu là phương pháp điểm gần kề của B. Martinet, phương pháp nguyên lý bài toán phụ của G. Cohen, phương pháp lai đường dốc nhất của Yamada v.v.... Hiện nay đang có nhiều công trình mở rộng hướng nghiên cứu của Yamada để giải bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động chung của một họ hữu hạn hay vô hạn các ánh xạ không giãn.

Mục đích của luận văn là trình bày phương pháp lặp giải bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động chung của họ đếm được các ánh xạ không giãn trong không gian Banach.

Bố cục luận văn gồm phần mở đầu, hai chương trình bày nội dung của luận văn, phần kết luận và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1: "Bất đẳng thức biến phân với toán tử J-đơn điệu" trình bày một số kiến thức cơ bản về không gian Banach, toán tử đơn điệu, toán tử J-đơn điệu và bài toán bất đẳng thức biến phân trong hai không gian Hilbert và Banach.

Chương 2: "Bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động của ánh xạ không giãn" trình bày phương pháp giải bài toán bất đẳng thức biến phân với toán tử đồng bức J-đơn điệu và toán tử J-đơn điệu mạnh trong không gian Banach. Các kiến thức trình bày trong luận văn được tổng hợp từ hai bài báo trong [2] và [3].

Luận văn được thực hiện và hoàn thành tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn trực tiếp của TS. Nguyễn Thị Thu Thủy và PGS.TS. Phạm Ngọc Anh. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới thầy cô, người đã tận tâm giảng dạy và chỉ bảo tác giả trong suốt quá trình tác giả thực hiện luận văn.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu, Phòng Đào tạo, Khoa Toán - Tin trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã quan tâm và giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian học tập tại trường.

Cuối cùng tác giả xin gửi lời cảm ơn tới gia đình, bạn bè, đồng nghiệp đã động viên, giúp đỡ và tạo điều kiện tốt nhất cho tác giả khi học tập và nghiên cứu.

Thái Nguyên, tháng 11 năm 2015.

Học viên

Nguyễn Thị Kim Chung

BẢNG KÝ HIỆU

$\mathbb{R}$	trường số thực
$\emptyset$	tập rỗng
$\mathbb{R}^n$	không gian Euclide n-chiều
$\|x\|$	giá trị tuyệt đối của x
$\|\|x\|\|$	chuẩn của véctơ x
P_C	phép chiếu mêtric từ H lên C
Q_C	phép co rút không giãn theo tia từ E lên C
$\langle x, y\rangle$	tích vô hướng của hai phần tử x và y
$\mathcal{D}(A)$	miền xác định của ánh xạ A
E^*	không gian đối ngẫu của E
$x_n \to x$	sự hội tụ mạnh của $\{x_n\}$ vào $x \in E$
$x_n \rightharpoonup x$	sự hội tụ yếu của $\{x_n\}$ vào $x \in E$
$\mathrm{Fix}(T)$	tập các điểm bất động của T
$\mathrm{VI}(C, A)$	tập các nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian Hilbert
$S(C, A)$	tập các nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian Banach

Chương 1

Bất đẳng thức biến phân với toán tử J-đơn điệu

Chương này giới thiệu khái niệm và một số tính chất của không gian Banach; toán tử đơn điệu, toán tử J-đơn điệu; và bài toán bất đẳng thức biến phân. Các kiến thức của chương được tổng hợp từ các tài liệu [1]–[7].

1.1. Không gian Banach

1.1.1. Không gian Banach trơn đều

Cho E là không gian Banach thực với chuẩn $\|.\|$. Ký hiệu E^* là không gian đối ngẫu của E và giá trị của $f \in E^*$ tại $x \in E$ là $\big\langle x, f \big\rangle$. Cho $\{x_n\}$ là một dãy trong E. Ký hiệu sự hội tụ mạnh của $\{x_n\}$ đến $x \in E$ là $x_n \to x$ và sự hội tụ yếu là $x_n \rightharpoonup x$. Gọi $U = \{x \in E : \|x\| = 1\}$.

Định nghĩa 1.1 Không gian Banach E gọi là *lồi đều* nếu với mỗi $\epsilon \in (0, 2]$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $x, y \in U$

$$\|x - y\| \geq \epsilon \quad \text{thỏa mãn} \quad \left\|\frac{x + y}{2}\right\| \leq 1 - \delta. \tag{1.1}$$

Ta thấy, không gian Banach lồi đều là không gian phản xạ và lồi chặt.

Định nghĩa 1.2 Không gian Banach E được gọi là *trơn* nếu giới hạn

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \tag{1.2}$$

tồn tại với mọi $x, y \in U$. Nó được gọi là *trơn đều* nếu giới hạn (1.2) đạt được đều với $x, y \in U$.

Định nghĩa 1.3

i) Chuẩn của E gọi là *khả vi Fréchet* nếu với mỗi $x \in U$, giới hạn (1.2) đạt được đều với $y \in U$.

ii) Chuẩn của E gọi là *khả vi Gâteaux đều* nếu với mỗi $y \in U$, giới hạn (1.2) đạt được đều với $x \in U$.

iii) Hàm số $\rho : [0, \infty) \to [0, \infty)$ được gọi là *môđun trơn* của E và được định nghĩa như sau

$$\rho(\tau) = \sup\left\{\frac{1}{2}(\|x+y\| + \|x-y\|) - 1 : x, y \in E, \|x\| = 1, \|y\| = \tau\right\}. \tag{1.3}$$

Ta thấy không gian E trơn đều nếu và chỉ nếu $\lim_{\tau \to 0} \rho(\tau)/\tau = 0$.

Định nghĩa 1.4 Cho số thực q cố định, với $1 < q \le 2$. Không gian Banach E gọi là *q-trơn đều* nếu tồn tại hằng số $c > 0$ sao cho $\rho(\tau) \le c\tau^q$ với mọi $\tau > 0$.

Bổ đề 1.1 *Cho số thực q với $1 < q \le 2$ và E là không gian Banach. Khi đó E là q-trơn đều nếu và chỉ nếu tồn tại hằng số $K \ge 1$ sao cho*

$$\frac{1}{2}\Big(\|x+y\|^q + \|x-y\|^q\Big) \le \|x\|^q + \|Ky\|^q \tag{1.4}$$

với mọi $x, y \in E$.

Hằng số K trong Bổ đề 1.1 được gọi là *hằng số q-trơn đều* của E.

1.1.2. Ánh xạ đối ngẫu

Định nghĩa 1.5 Cho số thực $q > 1$. *Ánh xạ đối ngẫu tổng quát* J_q từ E vào 2^{E^*} được định nghĩa như sau

$$J_q(x) = \Big\{x^* \in E^* : \big\langle x, x^* \big\rangle = \|x\|^q,\ \|x^*\| = \|x\|^{q-1}\Big\} \tag{1.5}$$

với mọi $x \in E$. Ánh xạ $J = J_2$ được gọi là *ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc*, và

$$J_q(x) = \|x\|^{q-2} J(x) \quad \text{với mọi} \quad x \in E. \tag{1.6}$$

Ta ký hiệu ánh xạ đối ngẫu tổng quát, chuẩn tắc đơn trị tương ứng là j_q và j. Nếu E là không gian Hilbert H thì $J = I$-toán tử đơn vị trong H. Ta thấy, với mọi $x, y \in E$ và $f \in J(y)$,

$$\|x\|^2 - \|y\|^2 \geq 2\langle x - y, f\rangle. \tag{1.7}$$

Ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc J có các tính chất sau.

(1) Nếu E là không gian lồi chặt, thì J là ánh xạ $1 - 1$ và

$$\langle x - y, x^* - y^*\rangle > 0 \quad \text{với} \quad (x, x^*),\ (y, y^*) \in J,\ x \neq y;$$

(2) Nếu E là không gian phản xạ, thì J là toàn ánh;

(3) Nếu E là không gian trơn đều, thì J là liên tục đều theo chuẩn trên mỗi tập con bị chặn của E.

Ngoài ra,

$$q\langle y - x, j_x\rangle \leq \|y\|^q - \|x\|^q, \tag{1.8}$$

với mọi $x, y \in E$ và $j_x \in J_q(x)$. Hơn nữa ta có kết quả sau.

Bổ đề 1.2 *Cho số thực q thỏa mãn $1 < q \leq 2$ và E là không gian Banach q-trơn đều. Khi đó*

$$\|x + y\|^q \leq \|x\|^q + q\langle y, J_q(x)\rangle + 2\|Ky\|^q \tag{1.9}$$

với mọi $x, y \in E$, trong đó J_q là ánh xạ đối ngẫu tổng quát của E và K là hằng số q-trơn đều của E.

Chứng minh. Cho $x, y \in E$ tùy ý. Từ (1.8) ta có

$$q\langle y, J_q(x)\rangle \geq \|x\|^q - \|x - y\|^q.$$

Kết hợp với Bổ đề 1.1 ta nhận được

$$\begin{aligned} q\langle y, J_q(x)\rangle &\geq \|x\|^q - \|x - y\|^q \\ &\geq \|x\|^q - (2\|x\|^q + 2\|Ky\|^q - \|x + y\|^q) \\ &= -\|x\|^q - 2\|Ky\|^q + \|x + y\|^q. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Từ đây suy ra

$$\|x + y\|^q \leq \|x\|^q + q\langle y, J_q(x)\rangle + 2\|Ky\|^q. \qquad \square$$