ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

VŨ THỊ THANH HUYỀN

BÀI TOÁN CAUCHY ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH TRUYỀN NHIỆT KHÔNG THUẦN NHẤT

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

VŨ THỊ THANH HUYỀN

BÀI TOÁN CAUCHY ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH TRUYỀN NHIỆT KHÔNG THUẦN NHẤT

***Chuyên ngành*: Toán giải tích**
***Mã số*: 60.46.01.02**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: TS. Phạm Thị Thủy

THÁI NGUYÊN - 2016

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các tài liệu trong luận văn là trung thực. Luận văn chưa từng được công bố trong bất cứ công trình nào.

Tác giả luận văn

Vũ Thị Thanh Huyền

Xác nhận của
Khoa chuyên môn

Xác nhận của
người hướng dẫn khoa học

TS. Phạm Thị Thủy

Lời cảm ơn

Bản luận văn được hoàn thành tại Trường Đại học Sư phạm – Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn tận tình của TS. Phạm Thị Thủy. Nhân dịp này tôi xin bày tỏ lòng biết ơn cô về sự hướng dẫn hiệu quả cùng những kinh nghiệm trong quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Xin chân thành cảm ơn Phòng Sau Đại học, Ban chủ nhiệm Khoa Toán, các thầy cô giáo Trường Đại học Sư phạm – Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học và Trường Đại học Sư phạm Hà Nội đã giảng dạy và tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu khoa học.

Bản luận văn chắc chắn sẽ không tránh khỏi những khiếm khuyết, vì vậy rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô giáo và các bạn học viên để luận văn này được hoàn chỉnh hơn.

Em xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 04 năm 2016

Tác giả luận văn

Vũ Thị Thanh Huyền

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Trong số lớp phương trình đạo hàm riêng tuyến tính, phương trình parabolic là lớp phương trình mô tả các quá trình truyền nhiệt, khuyếch tán. Các bài toán có chứa phương trình parabolic được nghiên cứu từ rất lâu và lý thuyết của các phương trình đó đến nay tương đối hoàn chỉnh. Khi nghiên cứu bài toán Cauchy cho phương trình truyền nhiệt, nhà toán học Pháp Poisson đã thiết lập công thức tính nghiệm, hiện nay mang tên ông và có nhiều ứng dụng. Ngày nay có rất nhiều phương pháp để nghiên cứu về phương trình đạo hàm riêng tuyến tính nhưng phương pháp biến đổi Fourier trong nhiều trường hợp tỏ ra rất quan trọng và hiệu quả. Phương pháp biến đổi Fourier giúp cho việc nghiên cứu các lớp phương trình khác nhau và thiết lập được công thức biểu diễn nghiệm của các bài toán. Không những thế phương pháp biến đổi Fourier còn nghiên cứu được tính chất của các công thức biểu diễn nghiệm đó.

Theo hướng nghiên cứu này chúng tôi chọn " ***Bài toán Cauchy đối với phương trình truyền nhiệt không thuần nhất*** " làm đề tài nghiên cứu của mình.

2. Mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu

2.1. Mục đích nghiên cứu

Nghiên cứu phương pháp biến đổi Fourier và áp dụng trong việc giải bài toán Cauchy cho phương trình truyền nhiệt không thuần nhất.

2.2. Nhiệm vụ nghiên cứu

Luận văn tập trung vào các nhiệm vụ chính sau đây

- Trình bày tổng quan về phương trình đạo hàm riêng, phép biến đổi Fourier trong $L^1(\mathbb{R}^n)$, trong $L^2(\mathbb{R}^n)$, và các tính chất của chúng.
- Tìm nghiệm của bài toán Cauchy cho phương trình truyền nhiệt không thuần nhất với hệ số hằng trong $\mathbb{R}^1$, hệ số hằng trong $\mathbb{R}^n$ và hệ số chỉ phụ thuộc biến thời gian trong $\mathbb{R}^n$.

3. Phương pháp nghiên cứu

Sử dụng phương pháp phương trình đạo hàm riêng, phương pháp giải tích, và sử dụng hệ thống các phép biến đổi Fourier, công thức Poisson để nghiên cứu bài toán Cauchy cho phương trình truyền nhiệt không thuần nhất.

4. Bố cục luận văn

Nội dung luận văn gồm 41 trang trong đó có phần mở đầu, hai chương nội dung, phần kết luận và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1. Trình bày một số kiến thức chuẩn bị để thực hiện nội dung của chương sau: Phân loại phương trình đạo hàm riêng, trình bày hệ thống về phép biến đổi Fourier trong $L^1(\mathbb{R}^n)$, trong $L^2(\mathbb{R}^n)$, các công thức đơn giản của biến đổi Fourier, biến đổi Fourier của một vài hàm số đơn giản.

Chương 2. Là nội dung chính của luận văn, trình bày các kết quả nghiên cứu về bài toán Cauchy đối với phương trình truyền nhiệt không thuần nhất với hệ số hằng trong $\mathbb{R}^1$, hệ số hằng trong $\mathbb{R}^n$ và hệ số chỉ phụ thuộc biến thời gian trong $\mathbb{R}^n$.

Cuối cùng là phần kết luận trình bày tóm tắt kết quả đạt được.

Chương 1

MỘT SỐ KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong chương này, ta sẽ nhắc lại một số kiến thức quan trọng làm nền tảng để nghiên cứu chương sau, đó là các kiến thức về phương trình đạo hàm riêng và biến đổi Fourier. Các nội dung trong chương được trích dẫn từ các tài liệu tham khảo [1], [2], [3], [4], [5], [6], [9],[10], [11].

1.1 Phân loại phương trình đạo hàm riêng

1.1.1 Phân loại phương trình tuyến tính cấp hai trong trường hợp hai biến

Định nghĩa 1.1.1.1. Cho k là một số nguyên dương và U là một tập mở trong $\mathbb{R}^n$. Một biểu thức có dạng

$$F\left(x, u\left(x\right), Du\left(x\right), \ldots, D^k u\left(x\right)\right) = 0, \qquad x \in U \tag{1.1.1}$$

được gọi là một phương trình đạo hàm riêng bậc k với

$$F : U \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^{n^k} \to \mathbb{R},$$

là hàm cho trước, và $u : U \to \mathbb{R}$ là hàm cần tìm.

Phương trình đạo hàm riêng (1.1.1) được gọi là giải được nếu tìm được tất cả các hàm số u thoả mãn (1.1.1).

Định nghĩa 1.1.1.2. Phương trình đạo hàm riêng (1.1.1) được gọi là tuyến tính nếu phương trình đó có dạng

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha\left(x\right) D^\alpha u = f\left(x\right),$$

trong đó $a_\alpha\left(x\right)$, $f\left(x\right)$ là các hàm số đã cho.

Phương trình tuyến tính này được gọi là thuần nhất nếu $f \equiv 0$.

Định nghĩa 1.1.1.3. Giả sử $u = u(x,y)$ là hàm xác định trong $\mathbb{R}^2$, $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp hai trong trường hợp hai biến là phương trình có dạng

$$a(x,y)\,u_{xx} + 2b(x,y)\,u_{xy} + c(x,y)\,u_{yy} + F(x,y,u,u_x,u_y) = 0.$$

a) Phân loại phương trình tuyến tính cấp hai trong trường hợp hai biến

Xét phương đạo hàm riêng trình tuyến tính cấp hai với các hệ số thực

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + F(x,y,u,u_x,u_y) = 0, \tag{1.1.2}$$

có biệt thức $\Delta = b^2 - ac$.

Xét một điểm (x_0, y_0) cố định. Phương trình (1.1.2) tại điểm (x_0, y_0) được gọi là

- Thuộc loại elliptic nếu như tại điểm đó $b^2 - ac < 0$.

- Thuộc loại hypecbolic nếu như tại điểm đó $b^2 - ac > 0$.

- Thuộc loại parabolic nếu như tại điểm đó $b^2 - ac = 0$.

Nếu tại mọi điểm trong một miền G mà phương trình (1.1.2) thuộc cùng một loại thì ta nói rằng phương trình (1.1.2) thuộc loại đó trong miền G.

b) Dạng chính tắc của phương trình tuyến tính cấp hai trong trường hợp hai biến

Ta đưa phương trình (1.1.2) về các dạng chính tắc sau

- Với $b^2 - ac > 0$ thì dạng chính tắc của phương trình loại hypecbolic là

$$u_{xx} - u_{yy} = \Phi \text{ hay } u_{xy} = \Phi.$$

- Với $b^2 - ac < 0$ thì dạng chính tắc của phương trình loại elliptic là

$$u_{xx} + u_{yy} = \Phi.$$

- Với $b^2 - ac = 0$ thì dạng chính tắc của phương trình loại parabolic là

$$u_{xx} = \Phi.$$

1.1.2 Phân loại phương trình tuyến tính cấp hai trong trường hợp nhiều biến

Định nghĩa 1.1.2.1. Giả sử $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ là hàm xác định trong $\mathbb{R}^n$. Phương trình tuyến tính cấp hai trong trường hợp $n-$ biến là phương trình có dạng

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{\text{ij}} u_{x_i x_j} + F\left(x_1, ..., x_n, u, u_{x_1}, ..., u_{x_n}\right) = 0, \tag{1.1.3}$$

với $a_{\text{ij}} = a_{ji}$ và là hàm của các biến $x_1, ..., x_n$.

a) Phân loại phương trình tuyến tính cấp hai trong trường hợp nhiều biến

Ta ký hiệu $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ là điểm trong không gian Ơ – clit n chiều với các tọa độ là $x_1, ..., x_n$.
Xét ma trận

$$A(x) = \|a_{\text{ij}}(x)\|\,. \tag{1.1.4}$$

Coi (1.1.4) là một ma trận đối xứng.
Ta cố định một điểm $x_0 = \left({x_1}^0, ..., {x_n}^0\right)$. Khi đó ma trận $A(x)$ trở thành ma trận hằng $A(x_0)$.
Phương trình

$$\det(A(x_0) - \lambda E) = 0, \tag{1.1.5}$$

trong đó E là ma trận đơn vị, λ là một vô hướng, được gọi là phương trình đặc trưng tại điểm x_0 của phương trình (1.1.3). Từ đó ta có

- Phương trình (1.1.3) được gọi là thuộc loại elliptic tại điểm $x_0 = \left({x_1}^0, ..., {x_n}^0\right)$ nếu như tại điểm đó, tất cả n nghiệm đối với λ của phương trình đặc trưng (1.1.5) đều khác không và cùng một dấu.

- Phương trình (1.1.3) được gọi là thuộc loại hypecbolic tại điểm $x_0 = \left({x_1}^0, ..., {x_n}^0\right)$ nếu như tại điểm đó, tất cả n nghiệm đối với λ của phương trình đặc trưng (1.1.5) đều khác không và trong đó có $n-1$ nghiệm cùng một dấu, còn nghiệm cuối cùng còn lại có dấu khác.

- Phương trình (1.1.3) được gọi là thuộc loại parabolic tại điểm $x_0 = \left({x_1}^0, ..., {x_n}^0\right)$ nếu như tại điểm đó, trong n nghiệm đối với λ của phương trình đặc trưng (1.1.5) có một nghiệm bằng không, còn $n-1$ nghiệm còn lại đều khác không và cùng một dấu.

Nếu tại mọi điểm trong một miền Ω của không gian E mà phương trình (1.1.3) thuộc cùng một loại, thì ta nói rằng phương trình (1.1.3) thuộc loại đó trong Ω.