ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

ĐÀO THỊ HOÀI THƯƠNG

CƠ SỞ GRÖBNER TRONG HÌNH HỌC NHIỆT ĐỚI

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên – 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

ĐÀO THỊ HOÀI THƯƠNG

CƠ SỞ GRÖBNER TRONG HÌNH HỌC NHIỆT ĐỚI

Chuyên ngành: ĐẠI SỐ VÀ LÝ THUYẾT SỐ
Mã số: 60.46.01.04

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
TS. HOÀNG LÊ TRƯỜNG

Thái Nguyên – 2016

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan rằng nội dung trình bày trong luận văn này là trung thực, không trùng lặp với các đề tài khác và các thông tin trích dẫn trong luận văn đã được chỉ rõ nguồn gốc.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2016

Người viết luận văn

Đào Thị Hoài Thương

Lời cảm ơn

Luận văn được hoàn thành trong khóa 22 đào tạo Thạc sĩ của trường Đại học Sư phạm – Đại học Thái Nguyên, dưới sự hướng dẫn của TS. Hoàng Lê Trường, Viện Toán học. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới thầy hướng dẫn, người đã tạo cho tôi một phương pháp nghiên cứu khoa học, tinh thần làm việc nghiêm túc và đã dành nhiều thời gian, công sức hướng dẫn tôi hoàn thành luận văn.

Tôi cũng xin bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc tới các thầy cô giáo của trường Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học, những người đã tận tình giảng dạy, khích lệ, động viên tôi vượt qua những khó khăn trong học tập.

Tôi xin chân thành cảm ơn Ban lãnh đạo Khoa Sau đại học, Trường Đại học Sư phạm – Đại học Thái Nguyên đã tạo mọi điều kiện thuận lợi, giúp đỡ tôi trong suốt thời gian tôi học tập.

Cuối cùng, tôi xin cảm ơn gia đình, người thân và bạn bè đã động viên, ủng hộ tôi để tôi có thể hoàn thành tốt khóa học và luận văn của mình.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2016

Người viết luận văn

Đào Thị Hoài Thương

Mục lục

Mở đầu

Một lí do cho sự thành công gần đây của hình học nhiệt đới là nó khá dễ hình dung. Điều này phần lớn là bởi vì chúng rời rạc, các đối tượng có cấu trúc tổ hợp của một phức đa diện. Mục đích của luận văn này là để giải thích nguồn gốc cấu trúc phức đa diện trong hình học nhiệt đới bằng quan điểm Gröbner trong đại số giao hoán.

Trong luận văn này, chúng ta làm việc trên trường K cố định với định giá không âm val : $K^* \to \mathbb{R}$, trong đó $K^* = K - \{0\}$. Kí hiệu $R = \{a \in K : \mathrm{val}(a) \geq 0\}$ là vành định giá của K. Vành R là vành địa phương với iđêan cực đại $\mathfrak{m}_{\mathrm{val}} = \{a \in K \mid \mathrm{val}(a) > 0\}$ và trường thặng dư $\Bbbk = R/\mathfrak{m}$. Với $a \in R$ ta kí hiệu $\bar{a}$ là ảnh của a trong $\Bbbk$. Đặt $\Gamma_{\mathrm{val}} \subseteq \mathbb{R}$ là ảnh của định giá val. Nếu $\Gamma_{\mathrm{val}} \neq \{0\}$ thì giả sử $1 \in \Gamma_{\mathrm{val}}$; điều này có thể được đảm bảo bằng cách thay thế val bởi một bội dương.

Giả sử rằng K là đầy đủ và trong nhiều trường hợp K đóng đại số. Khi đó chúng ta có định nghĩa sau

Định nghĩa 0.0.1. Cho $f = \sum_{u \in \mathbb{Z}^n} c_u x^u \in K[x_1^{\pm 1}, ..., x_n^{\pm 1}]$, tập $\mathrm{Trop}(V(f))$ là quỹ tích phi tuyến của hàm tuyến tính từng phần $\mathrm{Trop}(f)$ cho bởi $\mathrm{Trop}(f)(\mathbf{w}) = \min_{\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^n}(\mathrm{val}(c_{\mathbf{u}}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u})$, tức là hàm $\mathrm{Trop}(f)(\mathbf{w})$ đạt cực tiểu tại hai điểm $\mathbf{u}$ khác nhau. Cho đa tạp xuyến $X \subseteq T^n \cong (K^*)^n$. Đa tạp nhiệt đối của X là

$$\mathrm{Trop}(X) = \bigcap_{f \in I(X)} \mathrm{Trop}(V(f)),$$

trong đó $K[x_1^{\pm 1}, ..., x_n^{\pm 1}] \supseteq I(X) = \{f \mid f(\mathbf{x}) = 0 \text{ với mọi } \mathbf{x} \in X\}$.

Định lý cơ bản của hình học nhiệt đới như sau

Định lý 0.0.2. *Cho $X \subseteq T^n \cong (K^*)^n$, trong đó $K = \overline{K}$, tập $\mathrm{Trop}(X)$ bằng bao đóng trong tôpô Euclid trên $\mathbb{R}^n$ của tập*

$$\mathrm{val}(X) = \{(\mathrm{val}(x_1), ..., \mathrm{val}(x_n)) \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} = (x_1, ..., x_n) \in X\}.$$

Giả sử tồn tại một chẻ ra của định giá. Đó là đồng cấu nhóm $\Gamma_{\mathrm{val}} \to K^*$ từ $\mathbf{w} \in \Gamma_{\mathrm{val}}$ đến $t^{\mathbf{w}} \in K^*$ với $\mathrm{val}(t^{\mathbf{w}}) = \mathbf{w}$. Nếu K là trường của chuỗi Puiseux $\mathbb{C}\{\{t\}\}$ với các hệ số trong $\mathbb{C}$ thì chẻ ra để $\mathbf{w} \in \mathbb{Q}$ đến $t^{\mathbf{w}} \in \mathbb{C}\{\{t\}\}$. Nếu $K = \mathbb{Q}_p$ thì chẻ ra để $\mathbf{w} \in \mathbb{Z}$ đến $p^{\mathbf{w}}$. Nếu K là đóng đại số thì sự chẻ ra luôn tồn tại; xem [9, Bổ đề 2.1.13].

Với trường K cùng với định giá chẻ ra val, quỹ tích phi tuyến của hàm $\mathrm{Trop}(f)$, với $f \in K[x_1^{\pm 1}, ..., x_n^{\pm 1}]$ là quỹ tích của $\mathbf{w}$ đạt được nhỏ nhất ít nhất hai lần, và do đó bao đóng của tập các $\mathbf{w}$ mà $\mathrm{in}_{\mathbf{w}}(f)$ không là một đơn thức. Trong trường hợp đa tạp X, nếu định giá trên K không tầm thường thì $\mathrm{Trop}(X)$ được mô tả là bao đóng của $\mathbf{w} \in \Gamma_{\mathrm{val}}^n$ mà $\mathrm{in}_{\mathbf{w}}(I(X)) \neq \langle 1 \rangle$. Hơn nữa, đa tạp nhiệt đới còn có cấu trúc là phức đa diện. Để mô tả cấu trúc của quỹ tích phi tuyến $\mathrm{Trop}(X)$, chúng ta cần sử dụng lí thuyết cơ sở Gröbner đối với các iđêan thuần nhất trong vành đa thức. Mục đích của luận văn này là mô tả ứng dụng của lí thuyết cơ sở Gröbner trong định nghĩa đa tạp nhiệt đới.

Luận văn được chia làm hai chương:

Chương 1 trình bày một số kiến thức chuẩn bị về vành phân bậc, các định lý về đa diện lồi, phức đa diện.

Chương 2 trình bày cụ thể về khái niệm định giá, nhiệt đới hóa từ đó xây dựng cơ sở Gröbner và phức Gröbner.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, chúng tôi trình bày lại một số kiến thức cơ bản về vành phân bậc; định nghĩa và các định lý về đa diện lồi là cần thiết cho việc trình bày các nội dung ở chương 2.

1.1 Vành phân bậc

Định nghĩa 1.1.1. i) Một vành phân bậc R là một vành giao hoán, có đơn vị thỏa mãn các tính chất

1) $R = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n$ là tổng trực tiếp các nhóm con Abel R_n đối với phép cộng;

2) $R_n R_m \subseteq R_{m+n}$, với mọi $m, n \geq 0$.

ii) Cho $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ là vành phân bậc. Một $R-$môđun M được gọi là môđun phân bậc nếu thỏa mãn các điều kiện sau

1) $M = \bigoplus_{n \geq 0} M_n$ là tổng trực tiếp của các nhóm con Abel M_n đối với phép cộng;

2) $R_n M_m \subseteq M_{n+m}$, với mọi $m, n \geq 0$.

Ví dụ 1.1.2.

i) Cho R là một vành. Khi đó R là vành phân bậc với phân bậc tầm thường

$$R = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n,\ R_0 = R,\ R_i = 0 \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Tương tự, cho M là $R-$môđun. Khi đó M là $R-$môđun phân bậc với cấu trúc phân bậc tầm thường

$$M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n,\ M_0 = M,\ M_1 = 0 \text{ với mọi } n \geq 1$$

ii) Cho $A = R[x_1, ..., x_k]$ là vành đa thức k biến, có hệ số trong vành R. Khi đó A là vành phân bậc với phân bậc chuẩn tắc như sau $A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$, trong đó $A_0 = R$, với mọi $n \geq 1$,

$$A_n = \{f(x_1, ..., x_k) \in A \mid f(x) \text{ là đa thức thuần nhất bậc } n\}.$$

Lưu ý đa thức thuần nhất bậc d là đa thức có dạng $f(x) = \sum_{\|\alpha\|=d} a_\alpha x^\alpha$.

Định nghĩa 1.1.3. Nếu M là môđun phân bậc trên vành phân bậc R thì gọi phần tử x của R_i (hoặc M_i) là *phần tử thuần nhất* bậc i. Kí hiệu $\deg(x) = i$.

Định nghĩa 1.1.4. Iđêan $I \subset K[x_0, ..., x_n]$ là *thuần nhất* nếu nó có tập sinh là các đa thức thuần nhất.

Ví dụ 1.1.5. Cho trường K và vành đa thức $R = K[x, y, z]$ với phân bậc chuẩn tắc. Khi đó

i) $I_1 = \langle x^n + y^n - z^n \rangle$ là iđêan thuần nhất của R.

ii) $I_2 = \langle x + y^2 \rangle$ không là iđêan thuần nhất của R.