ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THỊ VÂN ANH

SỰ THÁC TRIỂN CỦA CÁC ÁNH XẠ PHÂN HÌNH VỚI GIÁ TRỊ TRÊN NHỮNG ĐA TẠP PHỨC KHÔNG KÄHLER

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THỊ VÂN ANH

SỰ THÁC TRIỂN CỦA CÁC ÁNH XẠ PHÂN HÌNH VỚI GIÁ TRỊ TRÊN NHỮNG ĐA TẠP PHỨC KHÔNG K*Ä*HLER

Chuyên ngành: Toán giải tích
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
TS. NGUYỄN THỊ TUYẾT MAI

THÁI NGUYÊN - 2016

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan rằng các kết quả trình bày trong luận văn này là trung thực và không trùng lặp với các đề tài đã công bố. Tôi cũng xin cam đoan rằng các tài liệu trích dẫn trong luận văn đã được chỉ rõ nguồn gốc.

Thái nguyên, tháng 04 năm 2016

Học viên

Nguyễn Thị Vân Anh

MỤC LỤC

LỜI MỞ ĐẦU

Giải tích phức hay còn gọi là lý thuyết hàm biến phức là một nhánh của toán học nghiên cứu các hệ hàm số một hay nhiều biến và các biến số đều là số phức. Trong đó, thác triển phân hình là một trong những bài toán trung tâm của Giải tích phức. Những năm gần đây, thác triển phân hình là vấn đề nhận được sự quan tâm của nhiều nhà toán học trên thế giới.

Trong luận văn này, tôi nghiên cứu vấn đề sau: Giả sử, cho một tập con mở khác rỗng $U \subset \Delta^n$, ánh xạ f thác triển trên $U \times \Delta$. Vậy, giá trị cực đại nào của $\widehat{U} \supset U$ sao cho f thác triển phân hình trên $\widehat{U} \times \Delta$?

Vấn đề này được gọi là thác triển kiểu Hartogs. Nếu $\widehat{U} = \Delta$ với mọi f lấy giá trị trong X và mọi gốc (khác rỗng) U thì ta nói rằng định lý thác triển kiểu Hartogs vẫn đúng với các ánh xạ phân hình vào trong X này. Với $X = \mathbb{C}$, tức là với các hàm chỉnh hình, định lý thác triển kiểu Hartogs được chứng minh bởi F. Hartogs. Nếu $X = \mathbb{CP}^1$, tức là các hàm phân hình, kết quả được chứng minh bởi E. Levi. Từ đó, định lý thác triển kiểu Hartogs được chứng minh ít nhất hai lần cho nhiều trường hợp tổng quát chứ không riêng những hàm chỉnh hình hay hàm phân hình.

Để hệ thống lại các kết quả chính về sự thác triển của các ánh xạ phân hình với giá trị trên những đa tạp phức không Kähler, tôi trình bày trong hai chương của luận văn:

Chương 1: Trình bày những kiến thức cơ sở về không gian phức, hàm chỉnh hình, hàm phân hình, đa tạp phức, tập giải tích, đa điều hòa dưới, phủ, mặt cầu.

Chương 2: Trình bày lại một cách chi tiết rõ ràng các kết quả nghiên cứu vềsự thác triển của các ánh xạ phân hình với giá trị trên những đa tạp phức không K$\ddot{a}$hler.

Để hoàn thành luận văn một cách hoàn chỉnh, em luôn nhận được sự hướng dẫn và giúp đỡ nhiệt tình của TS. Nguyễn Thị Tuyết Mai (Đại học sư phạm - ĐH Thái Nguyên). Em xin chân thành bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến cô và xin gửi lời tri ân nhất của em đối với những điều cô đã dành cho em.

Em xin chân thành cảm ơn ban lãnh đạo Phòng Đào tạo sau Đại học, quý thầy cô giảng dạy lớp Cao học K22A (2014 – 2016) Trường Đại học Sư phạm – Đại học Thái Nguyên đã tạo điều kiện và tận tình truyền đạt những kiến thức quý báu cho em hoàn thành khóa học.

Em xin gửi lời cảm ơn chân thành nhất tới gia đình, bạn bè, những người đã luôn động viên, hỗ trợ và tạo mọi điều kiện cho em trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn.

Mặc dù đã cố gắng rất nhiều nhưng trong luận này không thể tránh khỏi những thiếu sót. Em rất mong có được những ý kiến đóng góp của các thầy cô và các bạn.

Xin trân trọng cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2015

Tác giả luận văn

Nguyễn Thị Vân Anh

Chương 1
KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1. Không gian phức

1.1.1. Định nghĩa không gian phức

Định nghĩa 1.1: Xét không gian Oclit n chiều chẵn $\mathbf{R}^{2n}$, các điểm của nó là các bộ có thứ tự 2n số thực $(x_1,...x_{2n})$. Ta đưa vào trong đó cấu trúc phức bằng cách đặt $z_v = x_v + ix_{n+v} (v = 1,...n)$. Ta thường kí hiệu $x_{n+v} = y_v$ nên $z_v = x_v + iy_v (v = 1,..,n)$. Không gian mà điểm là những bộ n số phức (hữu hạn) $z = (z_1,...z_n) = \{z_v\}$ sẽ gọi là *không gian phức n chiều* và kí hiệu $\mathbf{C}^\mathbf{n}$. Đặc biệt, khi n = 1, ta có $\mathbf{C}^\mathbf{1} = \mathbf{C}$ là mặt phẳng số phức. Có thể xem rằng, với n tùy ý, không gian $\mathbf{C}^\mathbf{n}$ là tích n mặt phẳng phức $\mathbf{C}^\mathbf{n} = \underbrace{\mathbf{C} \times ... \times \mathbf{C}}_{\textbf{n lần}}$.

1.1.2. Không gian phức chuẩn tắc

Định nghĩa 1.2: Cho E là một không gian vecto phức. Một giả chuẩn p trên E là một ánh xạ từ E vào tập các số thực không âm thỏa mãn:

(i) $\mathrm{p(a + b) \leq p(a) + p(b)}$ với mọi a, b ∈ E.

(ii) $\mathrm{p(\lambda a) = |\lambda| p(a)}$ với mọi $\lambda \in \mathbb{C}$, với mọi a ∈ E.

Giả chuẩn p trên E xác định một tôpô trên E ($\{x \in E: \mathrm{p(x - a)} < \varepsilon\}$ là một lân cận mở của x ∈ E).

Không gian vecto phức E cùng với tôpô định nghĩa như trên được gọi là một không gian giả chuẩn tắc

Nếu p là một chuẩn trên E thì không gian phức E được gọi là *không gian phức chuẩn tắc.*

Nói một cách khác, một không gian phức E là không gian phức chuẩn tắc nếu p thỏa mãn các điều kiện (i) và (ii) và điều kiện sau:

(iii) $p(a) = 0$ nếu và chỉ nếu a = 0.

1.1.3. Không gian phức khả quy

Định nghĩa 1.3: Một cặp $(X, \mathcal{H})$ được gọi là *một không gian vành phức* nếu:

1. X là một không gian tôpô;
2. $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ là một bó $\mathbb{C}$-đại số địa phương trên X .

Định nghĩa 1.4:*Một không gian phức khả quy* là một không gian vành phức $(X, \mathcal{H})$ mà có những tính chất sau:

1. X là một không gian Hausdorff;
2. Với mọi điểm $x_0 \in X$, có một lân cận mở $U(x_0) \subset X$ và một tập giải tích A sao cho $(U, \mathcal{H}|U) \backsimeq \big(A, \mathcal{H}(A)\big)$.

(A nằm trong một tập mở $B \subset \mathbb{C}^n$ và $\mathcal{H}(A)$:=$(\mathcal{O}/\boldsymbol{\mathcal{I}}(A)|A$, trong đó $\boldsymbol{\mathcal{I}}(A)$ là một bó ideal của A).

1.2. Đa tạp phức

1.2.1. Định nghĩa đa tạp phức

Định nghĩa 1.5: Cho M là không gian tôpô Hausdorff.

V là một tập mở trong M và $\varphi : V \to \mathbb{C}^n$ là một ánh xạ. Khi đó:

Cặp(V, φ) được gọi là *một bản đồ địa phương* của M, nếu các điều kiện sau được thỏa mãn:

i) $\varphi(V)$ là tập mở trong$\mathbb{C}^n$,

ii) $\varphi : \mathrm{V} \to \varphi(\mathrm{V})$ là một đồng phôi.

Định nghĩa 1.6: Họ $\mathrm{A} = \{(V_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ của M được gọi là *một tập bản đồ giải tích* (atlas) của M nếu các điều kiện sau được thỏa mãn

i) $\{V_i\}_{i\in I}$ là một phủ mở của M,

ii) Với mọi V_i, V_j mà $V_i \cap V_j \neq \varnothing$, ánh xạ $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(V_i \cap V_j) \to \varphi_j(V_i \cap V_j)$ là ánh xạ chỉnh hình.

Xét họ các atlas trên M. Hai atlas gọi là tương đương nếu hợp của chúng là một atlas trên M. Dễ thấy sự tương đương giữa các atlas lập thành một quan hệ tương đương. Mỗi lớp tương đương của quan hệ tương đương trên gọi là một cấu trúc khả vi phức trên M. M cùng với cấu trúc khả vi phức trên nó được gọi là *một đa tạp phức n chiều*.

Ví dụ: Cho $D \subset \mathbb{C}^n$ là một miền. Khi đó, *D* là một đa tạp phức n chiều với bản đồ địa phương $\{(D, Id_D)\}$.

Định nghĩa 1.7: Cho U là một miền trong $\mathbb{C}^n$. Một tập con V của U là *một đa tạp con* nếu với mọi z trong U có một lân cận U_z và các hàm chỉnh hình $f_1, \ldots f_t$ trong U_z sao cho:

$$V \cap U_z = \{x \in U_z : f_1(x) = 0, \ldots, f_t(x) = 0\} = V(f_1, \ldots f_t)$$

1.2.2. Tập giải tích trên đa tạp phức

Định nghĩa 1.8: Cho Ω là một đa tạp phức (một miền trong $\mathbb{C}^n$ hoặc trong $\mathbb{P}_n$). Một tập $A \subset \Omega$ được gọi là *tập con giải tích* của Ω nếu với mỗi điểm $a \in \Omega$ có một lân cận U của a và các hàm $f_1, \ldots, f_N$ chỉnh hình trên U sao cho:

$$A \cap U = \{z \in U : f_1(z) = \cdots = f_N(z) = 0\}$$

Định nghĩa 1.9: Một tập A trong đa tạp phức Ω được gọi là *một tập giải tích* (địa phương) nếu M là tập các không điểm chung của một họ hữu hạn các hàm chỉnh hình trong một lân cận của mỗi điểm của nó.

Nhận xét:

+ Mọi miền $D \subset \mathbb{C}^n$ là tập giải tích trong $\mathbb{C}^n$ nhưng nó là tập con giải tích trong $\mathbb{C}^n$ chỉ khi $D \equiv \mathbb{C}^n$.

+ Mọi tập giải tích (địa phương) trên một đa tạp phức là tập con giải tích của một lân cận của nó.

Định nghĩa 1.10: Một tập giải tích A được gọi là *khả quy* nếu tồn tại các tập con giải tích $A_i \subset G, i = 1,2$ sao cho:

1. $A = A_1 \cup A_2$;
2. $A_i \neq A, i = 1,2$.

Nếu A không khả quy thì A được gọi là bất khả quy.

Định nghĩa 1.11: Tập con giải tích bất khả quy A' của tập giải tích A được gọi là thành phần bất khả quy của A nếu mọi tập con giải tích $A'' \subset A$ sao cho $A'' \neq A'$ và $A' \subset A''$ là khả quy.

1.3. Hàm chỉnh hình, hàm phân hình

Định nghĩa 1.12: Một hàm giá trị phức f xác định trên một tập con mở $D \subset \mathbb{C}^n$ *được gọi là chỉnh hình trên* $\mathbb{C}^n$ nếu với mỗi điểm $w \in D$ có một lân cận mở U, $w \in U \subset D$ sao cho hàm f có một khai triển thành chuỗi lũy thừa

$$f(z) = \sum_{v_1 \dots v_n = 0}^{\infty} a_{v_1 \dots v_n} (z_1 - w_1)^{v_1} \dots (z_n - w_n)^{v_n}$$ hội tụ với mọi $z \in U$.

Kí hiệu $\mathcal{O}$(D) là tập tất cả các hàm chỉnh hình trên D.

Định nghĩa 1.13: *Một hàm phân hình trên X* là một cặp (A, f) thỏa mãn các tính chất sau:

1) A là một tập con của X
2) F là một hàm chỉnh hình trên X-A
3) Với mọi điểm $x_0 \in A$, có một lân cận $U(x_0) \subset X$ và các hàm chỉnh hình g, h trên U sao cho:
   a. $A \cap U = \{x \in U \mid h(x) = 0\}$
   b. Các mầm g_{x_0}, h_{x_0} là nguyên tố cùng nhau
   c. $f(x) = g(x)/h(x)$ với mọi $x \in U - A$.