

**ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC**

HOÀNG THỊ CÚC

**BÀI TOÁN LUỒNG LỚN NHẤT VÀ
LUỒNG CHI PHÍ NHỎ NHẤT TRÊN MẠNG**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2016

**ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC**

HOÀNG THỊ CÚC

**BÀI TOÁN LUỒNG LỚN NHẤT VÀ
LUỒNG CHI PHÍ NHỎ NHẤT TRÊN MẠNG**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Toán ứng dụng

Mã số: 60 46 01 12

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

GS.TS. TRẦN VŨ THIỆU

Thái Nguyên - 2016

Mục lục

Danh sách kí hiệu	iii
Danh sách hình vẽ	v
Lời nói đầu	1
Chương 1. Kiến thức chuẩn bị	4
1.1 Khái niệm cơ bản về đồ thị	4
1.1.1 Định nghĩa và ký hiệu	4
1.1.2 Đồ thị đẳng cấu	7
1.1.3 Đồ thị liên thông	8
1.1.4 Đường và chu trình trong đồ thị	8
1.1.5 Một số dạng đồ thị đặc biệt	9
1.2 Mạng và luồng	12
1.3 Một số bài toán tối ưu trên đồ thị	13
1.3.1 Ghép cặp, phủ cạnh, phủ đỉnh, tập ổn định và clique	13
1.3.2 Bài toán phủ đỉnh, phủ cạnh và ghép cặp	14
1.4 Kết luận Chương 1	15
Chương 2. Bài toán luồng lớn nhất trên mạng	17
2.1 Nội dung bài toán	17
2.1.1 Mạng và luồng	17

2.1.2	Luồng tương thích lớn nhất	19
2.1.3	Bài toán luồng lớn nhất trên mạng	19
2.1.4	Tiêu chuẩn tối ưu	20
2.2	Thuật toán tìm luồng lớn nhất	22
2.3	Luồng lớn nhất và thiết diện nhỏ nhất	25
2.3.1	Khả năng của một mạng	25
2.3.2	Thiết diện nhỏ nhất	27
2.4	Kết luận Chương 2	29
Chương 3. Bài toán luồng chi phí nhỏ nhất trên mạng		30
3.1	Phát biểu bài toán	30
3.2	Tiêu chuẩn tối ưu	31
3.3	Thuật toán thu hẹp chính tắc	35
3.4	Trường hợp tổng quát ($d(u) \neq +\infty$)	40
3.5	Kết luận Chương 3	41
Kết luận		42
Tài liệu tham khảo		43

Danh sách kí hiệu

$G = G(V, E)$	đồ thị vô hướng với tập đỉnh V , tập cạnh E
$G = (A, U, d(u))$	mạng với tập đỉnh A , tập cung U , khả năng các cung $d(u)$
$X = \{x(u)\}$	luồng trên mạng
$u = (i, j)$	cạnh (cung) đi từ đỉnh i đến đỉnh j
$c(u), d_{ij}$	khả năng thông qua của cạnh (cung) $u = (i, j)$
$d(u), d_{ij}$	khả năng thông qua của cạnh (cung) $u = (i, j)$
$x(u)$	cường độ của luồng trên cạnh (cung) u
K_n	đồ thị hai phần đầy đủ n đỉnh
$K_{m,n}$	đồ thị hai phần đầy đủ, mỗi phần m và n đỉnh
p_i	yêu cầu của đỉnh i (đỉnh i là trạm phát khi $p_i < 0$, đỉnh i là trạm thu khi $p_i > 0$)
$\alpha_i = \alpha_i(X)$	thông lượng của luồng tại đỉnh i
U_i^-	tập hợp các cung đi tới đỉnh i
U_i^+	tập hợp các cung đi khỏi đỉnh i
$\sigma(X)$	trị số của luồng X
$f(X)$	hàm cước phí của luồng X
μ	dây chuyền hay chu trình trên mạng

Danh sách hình vẽ

1.1	Sơ đồ khu phố	4
1.2	Sơ đồ mạch điện	4
1.3	Đồ thị đại diện	5
1.4	Cạnh kép và đa đồ thị	6
1.5	Khuyên trong đa đồ thị	6
1.6	Đồ thị có hướng	6
1.7	Bậc của đỉnh trong đồ thị	7
1.8	Các đồ thị đẳng cấu với đồ thị ở Hình 1.3	7
1.9	Đồ thị G_1 , G_2 và hợp $G_1 \cup G_2$	8
1.10	Đồ thị không liên thông	8
1.11	Ví dụ về rừng và cây	10
1.12	Đồ thị đầy đủ K_4 và K_5	11
1.13	Đồ thị hai phần	11
1.14	Đồ thị hai phần đầy đủ: $K_{1,3}$, $K_{2,3}$, $K_{3,3}$, $K_{4,3}$	11
1.15	Phủ đỉnh, phủ cạnh và ghép cặp	15
2.1	Thông lượng ở đỉnh ($\alpha_i = 18 - 9 = 7$)	18
2.2	Dây chuyền chưa bão hòa	20
2.3	Luồng lớn nhất trong mạng dạng cây	25

3.1	Ví dụ 3.3.6: yêu cầu các trạm, cước phí các cung	39
3.2	Rút gọn đường nhánh	39
3.3	Luồng tối ưu: $x(u)$ ghi ở cung u	39

Lời nói đầu

Các sơ đồ giao thông, sơ đồ mạch điện hay sơ đồ tổ chức của một cơ quan, trường học đã khá quen thuộc với nhiều người. Đó là những hình ảnh sinh động và cụ thể của một khái niệm toán học trừu tượng - khái niệm đồ thị (graph).

Có thể hiểu đơn giản "đồ thị" là một cấu trúc toán học rời rạc, bao gồm hai yếu tố chính là đỉnh và cạnh cùng với mối quan hệ giữa chúng. Nếu trên các cạnh của đồ thị có xét tới sự di chuyển của lượng vật chất (nước, xăng dầu, hàng hóa . . .) thì đồ thị còn được gọi là một mạng (network). Đồ thị và mạng là mô hình toán học cho nhiều vấn đề lý thuyết và thực tiễn đa dạng.

Lý thuyết đồ thị và mạng đề cập tới nhiều bài toán đa dạng và có ý nghĩa thực tiễn thiết thực, cùng nhiều phương pháp xử lý và thuật toán giải độc đáo và hiệu quả, giúp ích cho sự phát triển tư duy toán học nói chung và khả năng vận dụng trong cuộc sống thường ngày nói riêng. Trong số đó đáng chú ý là hai bài toán sau đây: bài toán luồng lớn nhất và bài toán luồng chi phí nhỏ nhất trên mạng.

Bài toán thứ nhất là tìm cách vận chuyển được nhiều hàng nhất từ một (hay nhiều) đỉnh nguồn tới một (hay nhiều) đỉnh đích trên một mạng cho trước. Bài toán thứ hai thực chất là bài toán vận tải trên mạng làm sao vận chuyển được hàng hóa từ các điểm cung cấp tới các điểm tiêu thụ với chi phí nhỏ nhất. Các bài toán này đã được nhiều nhà toán học nổi tiếng quan tâm, nghiên cứu như Ford-Fulkerson, Hoàng Tụy. . . và đã có lý thuyết đẹp về luồng trên mạng.

Luận văn "*Luồng lớn nhất và luồng chi phí nhỏ nhất trên mạng*" có mục đích

tìm hiểu và trình bày về hai bài toán nói trên và các thuật toán giải hai bài toán đó. Luận văn được viết dựa chủ yếu trên các tài liệu tham khảo hiện có [1]-[5].

Nội dung luận văn gồm ba chương:

- *Chương 1. Kiến thức chuẩn bị* nhắc lại một số khái niệm cơ bản về đồ thị: đỉnh và cạnh, đường và chu trình, đồ thị đặc biệt (rừng và cây, đồ thị đầy đủ, đồ thị hai phần), khái niệm mạng và luồng trên mạng. Giới thiệu một số bài toán tối ưu trên đồ thị: tìm phủ đỉnh, phủ cạnh nhỏ nhất, tìm ghép cặp lớn nhất.
- *Chương 2. Bài toán luồng lớn nhất trên mạng* trình bày nội dung bài toán luồng lớn nhất trên mạng, một dạng mở rộng của bài toán luồng lớn nhất trên mạng giao thông Ford -Fulkerson, nêu điều kiện cần và đủ để có luồng lớn nhất và thuật toán tìm luồng lớn nhất trên mạng. Cuối chương giới thiệu định lý quan trọng cho biết trị số của luồng lớn nhất bằng khả năng của thiết diện nhỏ nhất.
- *Chương 3. Bài toán luồng chi phí nhỏ nhất trên mạng* đề cập tới bài toán vận tải trên mạng và trình bày "thuật toán thu hẹp chính tắc" giải bài toán.

Luận văn này được thực hiện tại Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên và hoàn thành với sự hướng dẫn của GS.TS. Trần Vũ Thiệu (Viện Toán học - Viện Hàn lâm Khoa học & Công nghệ Việt Nam). Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới người hướng dẫn khoa học của mình, người đã đặt vấn đề nghiên cứu, dành nhiều thời gian hướng dẫn và tận tình giải đáp những thắc mắc của tác giả trong suốt quá trình làm luận văn.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn Ban Giám hiệu Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, Ban Chủ nhiệm Khoa Toán-Tin, cùng các giảng viên tham gia giảng dạy đã tạo mọi điều kiện tốt nhất có thể để tác giả học tập và nghiên cứu.

Nhân dịp này, tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn tới tập thể Lớp B, cao học Toán khóa 8 (2014-2016) đã động viên và giúp đỡ tác giả rất nhiều trong suốt quá trình học tập.

Lời cuối, tác giả muốn dành những lời cảm ơn đặc biệt nhất đến đại gia đình đã luôn động viên và chia sẻ những khó khăn để tác giả hoàn thành tốt luận văn này.

Thái Nguyên, ngày 20 tháng 5 năm 2016

Tác giả

Hoàng Thị Cúc