ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

HOÀNG TRUNG THÔNG

PHƯƠNG PHÁP LẶP
GIẢI BÀI TOÁN CHẤP NHẬN TÁCH TỔNG QUÁT
TRONG KHÔNG GIAN HILBERT

Chuyên ngành: **Toán ứng dụng**
Mã số: **60 46 01 12**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

GS.TS. NGUYỄN BƯỜNG

THÁI NGUYÊN - 2016

Mục lục

Bảng ký hiệu

Trong toàn luận văn, ta dùng những ký hiệu với các ý nghĩa xác định trong bảng dưới đây:

$\mathbb{N}$	tập số nguyên không âm
$\mathbb{N}^*$	tập số nguyên dương
$\mathbb{R}$	tập số thực
H	không gian Hilbert thực
C	tập con đóng lồi của H
$\emptyset$	tập rỗng
$\forall x$	mọi x
$\exists x$	tồn tại x
$\langle x, y \rangle$	tích vô hướng của hai véctơ x và y
$\|x\|$	chuẩn của véctơ x
$x_n \to x$	x_n hội tụ mạnh đến x
$x_n \rightharpoonup x$	x_n hội tụ yếu x
T	toán tử đơn điệu trong không gian Hilbert
I	toán tử đồng nhất trong H
J_r	toán tử giải của T
P	phép chiếu mêtric từ H lên $T^{-1}0$
$\limsup_{n\to\infty} x_n$	giới hạn trên của dãy số $\{x_n\}$
$\liminf_{n\to\infty} x_n$	giới hạn dưới của dãy số $\{x_n\}$
∂f	dưới vi phân của hàm lồi f

Mở đầu

Bài toán chấp nhận tách tổng quát đóng vai trò đặc biệt quan trọng trong việc mô hình hóa nhiều bài toán ngược xuất hiện trong thực tế như bài toán nén hình ảnh, chụp hình cộng hưởng từ, mạng nơ ron, khôi phục ảnh. Một trong những phương pháp đã và đang được nhiều tác giả sử dụng để giải bài toán chấp nhận tách là phương pháp chiếu trong đó cần phải thực hiện phép chiếu mêtric lên các tập con lồi đóng của không gian Hilbert. Tuy nhiên, việc tính ảnh của ánh xạ chiếu mêtric trên một tập lồi đóng bất kỳ cũng không dễ thực thi. Do vậy, việc xây dựng các phương pháp xấp xỉ điểm bất động để giải bài toán chấp nhận tách là hướng nghiên cứu được nhiều nhà toán học quan tâm. Nhiều kết quả công bố gần đây về phương pháp giải cho lớp bài toán này thường đòi hỏi tính liên tục Lipschitz và hệ số Lipschitz của ánh xạ. Tuy nhiên trong thực hành tính toán, việc tính hệ số Lipschitz thường khá phức tạp và tốn kém, dẫn đến việc cần thiết phải cải tiến và loại bỏ điều kiện này để xây dựng các phương pháp giải hiệu quả hơn.

Đề tài của luận văn là phương pháp lặp giải bài toán chấp nhận tách tổng quát trong không gian Hilbert. Đây là một đề tài vừa có ý nghĩa về mặt lý thuyết, đồng thời vừa có ý nghĩa thực tiễn cao. Nội dung của bản luận văn được trình bày trong hai chương.

Chương 1: giới thiệu một cách hệ thống lại các định nghĩa, ví dụ và một số tính chất quan trọng của không gian Hilbert thực.

Chương 2: trình bày phương pháp lặp giải bài toán chấp nhận tách tổng quát trong không gian Hilbert, trình bày một số định lý hội tụ, các kết quả cơ bản và áp dụng.

Luận văn này được thực hiện tại Trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên và hoàn thành dưới sự hướng dẫn của GS.TS. Nguyễn Bường.

Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất tới thầy, người đã tận tình hướng dẫn, giúp đỡ cho tác giả trong quá trình học tập, nghiên cứu và viết bản luận văn này.

Tác giả chân thành cảm ơn Lãnh đạo trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên, Ban chủ nhiệm khoa Toán – Tin, cô giáo Nguyễn Thị Thu Thủy cùng toàn thể các thầy cô trong trường đã giảng dạy và giúp đỡ cho tác giả trong suốt thời gian học tập tại trường.

Tác giả xin bày tỏ lòng cảm ơn tới tập thể lớp Cao học Toán K8A (khóa 2014–2016), bạn bè, đồng nghiệp và gia đình đã động viên, góp ý và cho tác giả những nhận xét quý báu.

Xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 5 năm 2016

Tác giả luận văn

Hoàng Trung Thông

Chương 1

Một số kiến thức bổ trợ

Trong chương này, ta sẽ trình bày một số kiến thức được sử dụng trong chương sau. Đó là nhắc lại các kiến thức cơ bản về không gian Hilbert, các tính chất quan trọng của không gian Hilbert và giải tích lồi, trình bày về dưới vi phân. Bên cạnh đó ta cũng sẽ nhắc lại một số toán tử trong không gian Hilbert và phương pháp lặp Mann để tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn. Các kiến thức trong chương được tổng hợp từ các tài liệu [1]–[6].

1.1 Không gian Hilbert

1.1.1 Định nghĩa

Định nghĩa 1.1.1 Cho không gian véctơ X trên trường số thực $\mathbb{R}$. Tích vô hướng xác định trong X là một ánh xạ

$$\begin{aligned} \langle .,. \rangle :& X \times X \to \mathbb{R} \\ & (x,y) \mapsto \langle x,y \rangle \end{aligned}$$

thỏa mãn các điều kiện sau đây:

(i) $\langle x,x\rangle \geq 0,$ với mọi $x \in X$, $\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0;$

(ii) $\langle y,x\rangle = \langle x,y\rangle,$ với mọi $x,y \in X;$

(iii) $\langle x+x',y\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x',y\rangle$ với mọi $x,x',y \in X;$

(iv) $\langle \lambda x,y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle$ với mọi $x,y \in X,\ \lambda \in \mathbb{R}.$

Số $\langle x,y\rangle$ được gọi là tích vô hướng của hai véctơ x,y trong X.

Nhận xét 1.1.2 Từ định nghĩa suy ra với mọi $x, y, z \in X, \lambda \in \mathbb{R}$:

(1) $\langle x, y + y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle$;

(2) $\langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$;

(3) $\langle x, 0 \rangle = 0$.

Định nghĩa 1.1.3 Cặp $(X, \langle ., . \rangle)$, trong đó X là một không gian tuyến tính trên $\mathbb{R}$, $\langle ., . \rangle$ là tích vô hướng trên X được gọi là không gian tiền Hilbert thực.

Định lý 1.1.4 *Mọi không gian tiền Hilbert X đều là không gian tuyến tính định chuẩn, với chuẩn xác định bởi công thức*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \tag{1.1}$$

Định nghĩa 1.1.5 Nếu X là không gian tiền Hilbert thực và đầy đủ đối với chuẩn cảm sinh từ tích vô hướng xác định bởi (1.1) thì X được gọi là không gian Hilbert thực.

Định nghĩa 1.1.6 Cho H là không gian Hilbert. Dãy $\{x_n\}$ được gọi là hội tụ mạnh tới phần tử $x \in H$, ký hiệu $x_n \to x$, nếu $\|x_n - x\| \to 0$ khi $n \to \infty$.

Định nghĩa 1.1.7 Dãy $\{x_n\}$ trong không gian Hilbert H được gọi là hội tụ yếu tới phần tử $x \in H$, ký hiệu $x_n \rightharpoonup x$, nếu $\langle x_n, y \rangle \to \langle x, y \rangle$ khi $n \to \infty$ với mọi $y \in H$.

Chú ý 1.1.8

(a) Trong không gian Hilbert H, hội tụ mạnh kéo theo hội tụ yếu, nhưng điều ngược lại không đúng.

(b) Mọi không gian Hilbert đều có tính chất Kadec-Klee, tức là nếu dãy $\{x_n\}$ trong không gian Hilbert H thỏa mãn các điều kiện $\|x_n\| \to \|x\|$ và $x_n \rightharpoonup x$, thì $x_n \to x$ khi $n \to \infty$.

Định nghĩa 1.1.9 Cho C là tập con của không gian Hilbert H. Khi đó C được gọi là:

(a) Tập đóng nếu mọi dãy $\{x_n\} \subset C$ thỏa mãn $x_n \to x$ khi $n \to \infty$, ta đều có $x \in C$;

(b) Tập đóng yếu nếu mọi dãy $\{x_n\} \subset C$ thỏa mãn $x_n \rightharpoonup x$ khi $n \to \infty$, ta đều có $x \in C$;

(c) Tập compact nếu mọi dãy $\{x_n\} \subset C$ đều có một dãy con hội tụ về một phần tử thuộc C;

(d) Tập compact tương đối nếu mọi dãy $\{x_n\} \subset C$ đều có một dãy con hội tụ;

(e) Tập compact yếu nếu mọi dãy $\{x_n\} \subset C$ đều có một dãy con hội tụ yếu về một phần tử thuộc C;

(f) Tập compact tương đối yếu nếu mọi dãy $\{x_n\} \subset C$ đều có một dãy con hội tụ yếu.

Nhận xét 1.1.10

(a) Mọi tập compact đều là tập compact tương đối, nhưng điều ngược lại không đúng.

(b) Mọi tập đóng yếu đều là tập đóng, nhưng điều ngược lại không đúng.

Mệnh đề 1.1.11 *Cho H là không gian Hilbert thực và C là một tập con của H. Khi đó, ta có các khẳng định sau:*

(a) Nếu C là tập lồi, đóng thì C là tập đóng yếu;

(b) Nếu C là tập bị chặn thì C là tập compact tương đối yếu.

Định nghĩa 1.1.12 Cho C là một tập con khác rỗng, lồi, đóng của không gian Hilbert thực H. Ta biết rằng với mỗi $x \in H$, đều tồn tại duy nhất một phần tử $P_C(x) \in C$ thỏa mãn

$$\|x - P_C(x)\| = \inf_{y \in C} \|x - y\|$$

Phần tử $P_C(x)$ được xác định như trên được gọi là hình chiếu của x lên C và ánh xạ $P_C : H \to C$ biến mỗi phần tử $x \in H$ thành $P_C(x)$ được gọi là phép chiếu mêtric từ H lên C.

Đặc trưng của phép chiếu mêtric được cho bởi mệnh đề dưới đây.

Mệnh đề 1.1.13 *Cho C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của không gian Hilbert thực H. Khi đó, ánh xạ $P_C : H \to C$ là phép chiếu mêtric từ H lên C khi và chỉ khi*

$$\langle x - P_C(x), y - P_C(x)\rangle \geq 0 \text{ với mọi } \quad y \in C.$$

Nhận xét 1.1.14 Về phương diện hình học, với mọi $y \in C$, nếu ta gọi α là góc tạo bởi các véc tơ $x - P_C(x)$ và $y - P_C(x)$, thì $\alpha \leq \dfrac{\pi}{2}$.

1.1.2 Một số ví dụ

Ví dụ 1.1.15 $\mathbb{R}^n$ là không gian Hilbert thực với tích vô hướng

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha_k$$

trong đó $x = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ và $y = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ và chuẩn cảm sinh

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \alpha_k = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2.$$

Ví dụ 1.1.16 Không gian

$$l^2 = \left\{ x = \{x_n\}_n \in \mathbb{R} : \sum_{k=1}^{\infty} x_n y_n \right\}$$

là không gian Hilbert với tích vô hướng $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ và chuẩn cảm sinh

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_n|^2}$$

với mọi $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$.