ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

HỨA MẠNH HƯỞNG

MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA PHÉP THẾ LƯỢNG GIÁC

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 60 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: TS. Nguyễn Văn Ngọc

THÁI NGUYÊN - 2016

Mục lục

Mở đầu

Đôi khi một bài toán đại số, hay giải tích có thể được giải dễ dàng bằng cách sử dụng các hàm lượng giác, mà chúng ta sẽ gọi là "Phép thế lượng giác". Đó là nhờ các tính chất đặc thù của các hàm lượng giác mà các hàm khác không thể có, như công thức biến tổng thành tích, công thức biến tích thành tổng, các công thức cung nhân hai, nhân ba, tính chất bị chặn, đơn điệu, tuần hoàn v.v.. Đặc biệt là các đồng nhất thức, các bất đẳng thức quan trọng của các hàm lượng giác.

Mục đích của luận văn này là tìm hiểu, thu thập các tài liệu và phân loại các bài toán về ứng dụng của phép thế lượng giác trong một số bài toán cơ bản của đại số, như chứng minh đẳng thức và bất đẳng thức, giải phương trình và bất phương trình v.v.. Luận văn này không đề cập đến ứng dụng của phép thế lượng giác trong tính các nguyên hàm và tích phân...

Thông thường, một số bất đẳng thức đại số phức tạp được đơn giản hóa bằng cách sử dụng các phép thế lượng giác. Khi ta đặt được một phép thế khéo thì độ khó của bài toán có thể giảm đi nhiều đến mức ta có thể thấy ngay đáp án. Bên cạnh đó, các hàm số lượng giác nổi tiếng cũng có thể giúp giải bất đẳng thức. Kết quả là có rất nhiều bài toán đại số có thể giải quyết bằng cách sử dụng phép thế lượng giác.

Luận văn có bố cục: Mở đầu, ba chương, Kết luận và Tài liệu tham khảo.

Chương 1: Kiến thức bổ trợ, trình bày về các bất đẳng thức cơ bản của dãy số, các đẳng thức và bất đẳng thức lượng giác thông dụng, các phép thế lượng giác cơ bản.

Chương 2: Trình bày ứng dụng của phép thế lượng giác trong chứng minh đẳng thức và bất đẳng thức có độ khó cao được trích ra từ các đề thi vào Đại học, thi học sinh giỏi hoặc Olympic Toán quốc tế.

Chương 3: Trình bày ứng dụng của phép thế lượng giác trong giải phương trình, hệ phương trình, bất phương trình và dãy số.

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên dưới sự giúp đỡ và hướng dẫn tận tình của TS. Nguyễn Văn Ngọc. Qua đây, tác giả xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc tới Thầy, người đã dành nhiều thời gian và tâm huyết để hướng dẫn và tạo điều kiện cho tác giả trong suốt thời gian làm luận văn.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu, phòng đào tạo, khoa Toán - Tin trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã quan tâm và giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian học tập tại trường.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban Giám hiệu, các đồng nghiệp trong trường Trung học Phổ thông Hoàng Văn Thụ, huyện Lục Yên, tỉnh Yên Bái, nơi tác giả đang công tác đã luôn tạo điều kiện giúp đỡ và động viên để tác giả hoàn thành khóa học.

Cuối cùng tác giả xin gửi lời cảm ơn tới gia đình, bạn bè đã luôn động viên, giúp đỡ và tạo điều kiện tốt nhất cho tác giả trong quá trình học tập, nghiên cứu và làm luận văn.

Xin chân thành cảm ơn.

Thái Nguyên, tháng 05 năm 2016

Học viên

Hứa Mạnh Hưởng

Chương 1

Kiến thức bổ trợ

Chương này có tính bổ trợ, trình bày về các bất đẳng thức cơ bản của dãy số, các đẳng thức và bất đẳng thức lượng giác thông dụng, các phép thế lượng giác cơ bản. Các kiến thức này sẽ được dùng đến thường xuyên trong các chương sau. Nội dung của chương này về cơ bản được hình thành từ các tài liệu [4, 5, 6].

1.1 Các bất đẳng thức cơ bản

1.1.1 Các bất đẳng thức cơ bản của dãy số

Các bất đẳng thức đại số được ứng dụng rất sâu rộng trong chứng minh bất đẳng thức hình học. Luận văn này trình bày bốn bất đẳng thức đại số cơ bản nhất đó là bất đẳng thức $AM - GM$ (Arithmetic Mean - Geometric Mean), bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, bất đẳng thức Chebyshev và bất đẳng Jensen.

Định lý 1.1. (Bất đẳng thức $AM-GM$) *Với n số thực không âm bất kì $a_1, a_2, \ldots,$ a_n, ta có bất đẳng thức*

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1.a_2.\ldots.a_n}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Hệ quả 1.1. (Bất đẳng thức $GM - HM$) *Với mọi bộ số dương ta đều có*

$$\sqrt[n]{a_1.a_2.\ldots.a_n} \geqslant \frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Hệ quả 1.2. *Với mọi bộ số dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ta đều có*

$$\frac{1}{n}\Big(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\Big) \geqslant \frac{n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Hệ quả 1.3. *Với mọi bộ số không âm* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *và* $m = 1, 2, \ldots$ *ta đều có*

$$\frac{a_1^m + a_2^m + \ldots + a_n^m}{n} \geqslant \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^m.$$

Định lý 1.2. (Bất đẳng thức Cauchy - Schwarz) *Xét hai bộ số thực tùy ý* $a_1, a_2, \cdots, a_n$ *và* $b_1, b_2, \cdots, b_n$. *Khi đó ta có*

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \cdots = \dfrac{a_n}{b_n}$.
(Với quy ước nếu mẫu bằng 0 thì tử cũng bằng 0).

Định lý 1.3. (Bất đẳng thức Chebyshev)

1. *Nếu* $(a_1, a_2, ..., a_n)$ *và* $(b_1, b_2, ..., b_n)$ *là hai dãy số đồng dạng (cùng đơn điệu tăng hoặc cùng đơn điệu giảm) thì*

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n}{n} \geq \left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\right).\left(\frac{b_1 + b_2 + ... + b_n}{n}\right).$$

2. *Nếu* $(a_1, a_2, ..., a_n)$ *và* $(b_1, b_2, ..., b_n)$ *là hai dãy ngược nhau(một dãy đơn điệu tăng, còn dãy kia đơn điệu giảm) thì*

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n}{n} \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\right).\left(\frac{b_1 + b_2 + ... + b_n}{n}\right).$$

1.1.2 Hàm lồi và bất đẳng thức Jensen

Định nghĩa 1.1. Hàm số thực $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ gọi là hàm lồi trên khoảng (a, b) nếu với mọi $x, y \in (a, b)$ và mọi $\lambda \in [0, 1]$, ta có

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y). \tag{1.1}$$

Nếu trong (1.1) ta có bất đẳng thức nghiêm ngặt (chặt) thì khi đó ta nói f là hàm lồi thực sự. Cho hàm f ta nói nó là hàm lõm nếu $-f$ là hàm lồi.

Nếu f được xác định trên $\mathbb{R}$, nó có thể xảy ra trên một vài khoảng hàm này là hàm lồi, nhưng trên khoảng khác nó là hàm lõm. Vì lý do này ta chỉ xét các hàm số xác định trên các khoảng.

Định lý 1.4. (Bất đẳng thức Jensen 1906, Joham Ludwig Jensen 1859 - 1925). *Cho* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *là hàm lồi trên khoảng* (a, b). *Cho* $n \in \mathbb{N}$ *và* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in$

$(0,1)$ *là các số thực thỏa mãn* $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$. *Khi đó với mọi* $x_1, x_2, \cdots, x_n \in (a,b)$ *ta có*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i),$$

nghĩa là

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n). \tag{1.2}$$

1.2 Các đẳng thức và bất đẳng thức lượng giác thông dụng

1.2.1 Các đồng nhất thức

Thông thường, để chứng minh một bất đẳng thức đại số cho trước, ta có thể sử dụng phép thế lượng giác một cách hiệu quả và hầu như lúc nào cũng có thể giải được.

Sử dụng các phép thế như vậy, mỗi bất đẳng thức cho trước có thể rút gọn thành một bất đẳng thức mới, mà việc chứng minh sẽ đơn giản hơn rất nhiều (thường sử dụng bất đẳng thức Jensen và các yếu tố lượng giác). Do đó cần có một sự hiểu biết về lượng giác.

Chúng ta sẽ đưa ra một vài lập luận cần thiết và có ích khi sử dụng bất đẳng thức Jensen. Cụ thể là, hàm $\sin x$ lõm trên $(0,\pi)$, hàm $\cos x$ lõm trên $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, do đó cũng lõm trên $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $\tan x$ lồi trên $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$; $\cot x$ lồi trên $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Hơn nữa, không chứng minh (các chứng minh là lượng giác thuần túy và một vài chứng minh có thể tìm thấy trong một số sách toán phổ thông), luận văn sẽ đưa ra một số công thức lượng giác và quan hệ giữa các góc của một tam giác.

Trong phần này ta luôn giả sử tam giác ABC có:

- $BC=a, CA=b, AB=c$;
- Δ là diện tích tam giác;
- p là nửa chu vi tam giác;
- $m_a, m_b, m_c, w_a, w_b, w_c, h_a, h_b, h_c$ lần lượt là độ dài các trung tuyến, các phân giác và các đường cao tương ứng với các cạnh a, b, c;
- r, R, r_a, r_b, r_c lần lượt là các bán kính đường tròn nội tiếp, đường tròn ngoại tiếp, đường tròn bàng tiếp với các cạnh a, b, c của tam giác ABC;
- $\sum a = a+b+c$.

Mệnh đề 1.1. *Cho α, β, γ là các góc của một tam giác cho trước. Khi đó ta có các công thức sau:*

$I_1 : \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\dfrac{\alpha}{2}.\sin\dfrac{\beta}{2}.\sin\dfrac{\gamma}{2},$

$I_2 : \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\dfrac{\alpha}{2}.\cos\dfrac{\beta}{2}.\cos\dfrac{\gamma}{2},$

$I_3 : \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha.\sin\beta.\sin\gamma,$

$I_4 : \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2 + 2\cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma,$

$I_5 : \tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha.\tan\beta.\tan\gamma,$

$I_6 : \cot\dfrac{\alpha}{2} + \cot\dfrac{\beta}{2} + \cot\dfrac{\gamma}{2} = \cot\dfrac{\alpha}{2}.\cot\dfrac{\beta}{2}.\cot\dfrac{\gamma}{2}.$

Mệnh đề 1.2. *Cho α, β, γ là các số thực tùy ý. Khi đó ta có:*

$I_7 : \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma - \sin(\alpha+\beta+\gamma) = 4\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}.\sin\dfrac{\beta+\gamma}{2}.\sin\dfrac{\gamma+\alpha}{2},$

$I_8 : \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos(\alpha+\beta+\gamma) = 4\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}.\cos\dfrac{\beta+\gamma}{2}.\cos\dfrac{\gamma+\alpha}{2}.$

Mệnh đề 1.3. *Cho $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$. Khi đó α, β, γ là các góc của một tam giác nếu và chỉ nếu*

$$\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2} + \tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\gamma}{2} = 1.$$

Chứng minh. Giả sử α, β, γ là các góc của một tam giác bất kì. Khi đó $\alpha+\beta+\gamma = \pi$, nghĩa là $\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\alpha+\beta}{2}$. Do đó

$$\begin{aligned}\tan\frac{\gamma}{2} &= \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \cot\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\\ &= \frac{\cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2} - 1}{\cot\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\beta}{2}} = \frac{1 - \tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2}}\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2} + \tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\gamma}{2} = 1.$$

Ngược lại, giả sử $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ thỏa mãn đẳng thức

$$\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2} + \tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\gamma}{2} = 1. \tag{1.3}$$

Nếu $\alpha = \beta = \gamma$ thì $3\tan^2\dfrac{\alpha}{2} = 1$. Mà $\tan\alpha > 0$ nên $\tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Suy ra $\alpha = \beta = \gamma = 60^0$ kéo theo $\alpha+\beta+\gamma = \pi$ hay α, β, γ là các góc của một tam giác.

Không mất tính tổng quát ta giả sử $\alpha \neq \beta$. Vì $0 < \alpha + \beta < 2\pi$ nên tồn tại $\gamma_1 \in (-\pi, \pi)$ sao cho $\alpha + \beta + \gamma_1 = \pi$. Theo chứng minh trên ta có

$$\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma_1}{2} + \tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\gamma_1}{2} = 1. \tag{1.4}$$

Ta sẽ chứng minh $\gamma = \gamma_1$, suy ra $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, tức là α, β, γ là các góc của một tam giác. Thật vậy, trừ hai vế của (1.3) cho (1.4) ta có
$\tan\frac{\gamma}{2} = \tan\frac{\gamma_1}{2}$, suy ra $\left|\frac{\gamma - \gamma_1}{2}\right| = k\pi, k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$, mà $\left|\frac{\gamma - \gamma_1}{2}\right| \leq \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma_1}{2} < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$, suy ra $k = 0$ hay $\gamma = \gamma_1$.

□

Mệnh đề 1.4. *Cho $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$. Khi đó α, β, γ là các góc của một tam giác nếu và chỉ nếu*

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}.\sin\frac{\beta}{2}.\sin\frac{\gamma}{2} = 1.$$

Chứng minh. Giả sử α, β, γ là các góc của một tam giác. Khi đó

$$\begin{aligned}
&\sin^2\frac{\gamma}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}.\sin\frac{\beta}{2}.\sin\frac{\gamma}{2} = \cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}.\sin\frac{\beta}{2}.\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\\
&= \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}.\sin\frac{\beta}{2}\right)\\
&= \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + \cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\\
&= \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{1}{2}(\cos\alpha + \cos\beta)\\
&= \frac{1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{\beta}{2}}{2} = 1 - \sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\beta}{2},
\end{aligned}$$

tức là,

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}.\sin\frac{\beta}{2}.\sin\frac{\gamma}{2} = 1.$$

Ngược lại, giả sử $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$ sao cho

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}.\sin\frac{\beta}{2}.\sin\frac{\gamma}{2} = 1. \tag{1.5}$$

Ta sẽ chứng minh $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Thật vậy, vì $0 < \alpha + \beta < 2\pi$ nên tồn tại $\gamma_1 \in (-\pi, \pi)$ sao cho $\alpha + \beta + \gamma_1 = \pi$. Dễ thấy

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma_1}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}.\sin\frac{\beta}{2}.\sin\frac{\gamma_1}{2} = 1. \tag{1.6}$$

Trừ (1.5) cho (1.6) ta được