ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

o0o

NGÔ DUY TOẢN

THUẬT TOÁN TÁCH LIONS-MERCIER VÀ PHƯƠNG PHÁP LUÂN HƯỚNG TÌM KHÔNG ĐIỂM CỦA TỔNG HAI TOÁN TỬ ĐƠN ĐIỆU

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————o0o———————

NGÔ DUY TOẢN

THUẬT TOÁN TÁCH LIONS-MERCIER VÀ PHƯƠNG PHÁP LUÂN HƯỚNG TÌM KHÔNG ĐIỂM CỦA TỔNG HAI TOÁN TỬ ĐƠN ĐIỆU

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 60 46 01 12

GIÁO VIÊN HƯỚNG DẪN
GS.TS. NGUYỄN BƯỜNG

THÁI NGUYÊN - 2016

Mục lục

Bảng ký hiệu

Trong toàn luận văn, ta dùng những ký hiệu với các ý nghĩa xác định trong bảng dưới đây:

$\mathbb{R}$	tập số thực
$\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$	không gian véc tơ n, m chiều tương ứng
$\mathcal{H}$	không gian Hilbert thực
$\mathcal{H}^*$	không gian liên hợp của $\mathcal{H}$
$C[a, b]$	tập các hàm thực lien tục trên $[a, b]$
conv C	bao lồi của tập C
$\overline{\text{conv}}\ C$	bao lồi đóng của tập C
A^*	toán tử liên hợp của toán tử A
$\overline{A}$	toán tử mở rộng của toán tử A
dom A	miền xác định của toán tử A
gra A	đồ thị của toán tử A
dom$f$	miền hữu hiệu của hàm f
epi$f$	tập trên đồ thị của hàm f
zer(A)	tập tất cả không điểm của $A, A^{-1}(0)$
$J_{r,T}$	toán tử giải của toán tử T
N_C	hình nón chuẩn tắc ứng với tập lồi C
$\emptyset$	tập rỗng
$\delta_C(.)$	hàm chỉ trên C
$\mathcal{V}^{\perp}$	bù vuông góc của không gian con $\mathcal{V}$

Mở đầu

Cho A và B là hai toán tử đơn điệu cực đại trong không gian Hilbert $\mathcal{H}$, $C := A + B$. Nội dung của đề tài luận văn nghiên cứu bài toán tìm không điểm của toán tử C trên cơ sở kết quả của J. Eckstein [4].

Để giải bài toán này, J. Eckstein [4] đưa vào toán tử đơn điệu cực đại $S_{\lambda,A,B}$ mà tập không điểm của nó xấp xỉ tập không điểm của $A+B$. Trong trường hợp B là nón chuẩn tắc của một không gian con tuyến tính thì $S_{\lambda,A,B}$ trùng với ngược từng phần của toán tử Spingarn (xem [12], [13]). Ngoài ra, khi $r = 1$ thì toán tử giải $(I + rS_{\lambda,A,B})^{-1}$ của $S_{\lambda,A,B}$ là toán tử $G(\lambda)$ của Lions–Mercier [6]. Vì vậy, thuật toán Lions–Mercier thực sự là thuật toán điểm gần kề ứng dụng cho toán tử $S_{\lambda,A,B}$. Ngoài ra, J. Eckstein [4] cũng chỉ ra rằng kỹ thuật của Spingarn cho cực tiểu phiếm hàm lồi trên không gian con tuyến tính thực chất là một trường hợp riêng trong cách tiếp cận của Lions–Mercier. Đồng thời thuật toán Lions–Mercier mở rộng thuật toán luân hướng trong qui hoạch lồi đã được chỉ ra bởi Gabay [5] và thuật toán luân hướng cũng là một ví dụ của thuật toán điểm gần kề.

Mục đích của đề tài luận văn là trình bày lại kết quả của J. Eckstein [4] về mối quan hệ giữa một số thuật toán tìm không điểm của toán tử đơn điệu cực đại: thuật toán điểm gần kề được đưa ra bởi Martinet [7], sau đó được phát triển bởi Rockafellar [10]; phương pháp Lions–Mercier tìm không điểm của tổng hai toán tử đơn điệu cực đại [6]; phương pháp ngược từng phần của Spingarn cho toán tử đơn điệu cực đại [12], [13].

Nội dung của đề tài luận văn được viết trong hai chương:

Chương 1: "Không gian Hilbert và toán tử đơn điệu cực đại". Chương này giới thiệu về không gian Hilbert trên trường số thực và một số kiến thức cơ bản về giải tích lồi. Tiếp theo là giới thiệu về toán tử đơn điệu cực đại và định nghĩa bài toán tìm không điểm của toán tử.

Chương 2: "Thuật toán tách Lions–Mercier và phương pháp luân hướng tìm không điểm của tổng hai toán tử đơn điệu cực đại". Chương này nghiên cứu một số phương pháp tìm không điểm của tổng hai toán tử đơn điệu cực đại, chỉ ra phương pháp Lion–Mercier thực chất là trường hợp đặc biệt của thuật toán điểm gần kề, đồng thời nêu nguồn gốc của phương pháp luân hướng và đưa ra mối quan hệ với thuật toán tách.

Luận văn này được hoàn thành tại Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn tận tình của GS. TS. Nguyễn Bường, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất tới thầy, người đã người dành nhiều thời gian và tâm huyết để hướng dẫn tận tình, giúp đỡ tôi trong quá trình học tập, nghiên cứu và viết bản luận văn này.

Tôi cũng xin chân thành cảm ơn Lãnh đạo Trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên, Ban chủ nhiệm khoa Toán – Tin cùng toàn thể các thầy cô trong và ngoài trường đã giảng dạy giúp tác giả trau dồi thêm rất nhiều kiến thức phục vụ cho việc học tập và nghiên cứu của bản thân. Tác giả xin gửi lời cảm ơn chân thành đến các thầy cô.

Cuối cùng tác giả xin gửi lời cảm ơn tới gia đình, bạn bè đã luôn động viên, giúp đỡ và tạo điều kiện tốt nhất cho tác giả trong quá trình học tập, nghiên cứu và làm luận văn.

Xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 6 năm 2016

Học viên

Ngô Duy Toản

Chương 1

Không gian Hilbert và toán tử đơn điệu cực đại

Chương này trình bày một số khái niệm và tính chất cơ bản của không gian Hilbert thực $\mathcal{H}$, giới thiệu về toán tử đơn điệu cực đại, định nghĩa không điểm để phục vụ cho chương sau. Các kiến thức của chương được tổng hợp từ tài liệu [7], [10].

1.1 Không gian Hilbert

Định nghĩa 1.1.1 Cho $\mathcal{H}$ là không gian tuyến tính xác định trên trường số thực $\mathbb{R}$. Một tích vô hướng trong $\mathcal{H}$ là một ánh xạ $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn các tính chất sau:

i. $\langle x, x\rangle \geq 0,\ \forall x \in \mathcal{H}$ và $\langle x, x\rangle = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$,

ii. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle\ ,\ \forall x, y \in \mathcal{H}$,

iii. $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle\ ,\ \forall x, y, z \in \mathcal{H}$,

iv. $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha \langle x, y\rangle\ ,\ \forall x, y \in \mathcal{H},\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Số thực $\langle x, y\rangle$ được gọi là tích vô hướng của hai véctơ x và y. Cặp $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ gọi là không gian tiền Hilbert.

Định lý 1.1.2 (Bất đẳng thức Cauchy–Schwarz) *Trong không gian tiền Hilbert $\mathcal{H}$, $\forall x, y \in \mathcal{H}$ ta luôn có bất đẳng thức sau:*

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle.\langle y, y\rangle.$$

Chứng minh. Với $y = 0$ bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

Giả sử $y \neq 0$ khi đó $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ta có:

$$\langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle \geqslant 0,$$

nghĩa là

$$\langle x, x\rangle + \lambda\langle y, x\rangle + \lambda\langle x, y\rangle + |\lambda|^2\langle y, y\rangle \geqslant 0.$$

Chọn $\lambda = -\dfrac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}$ ta được $\langle x, x\rangle - \dfrac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle} \geqslant 0$ hay $|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle.\langle y, y\rangle$. Bất đẳng thức được chứng minh. □

Dấu bằng trong bất đẳng thức Schwarz xảy ra khi và chỉ khi x và y phụ thuộc tuyến tính. Mối quan hệ giữa khái niệm chuẩn và tích vô hướng được thể hiện qua nhận xét sau:

Nhận xét 1.1.3 Mọi không gian tiền Hilbert $\mathcal{H}$ là không gian tuyến tính định chuẩn, với chuẩn được xác định:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}, \quad x \in \mathcal{H}.$$

Bất đẳng thức Schwarz được viết lại:

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|.\|y\|.$$

Định nghĩa 1.1.4 Cho X là không gian định chuẩn, dãy $\{x_n\} \subset X$ gọi là dãy cơ bản nếu:

$$\lim_{m,n\to\infty} \|x_n - x_m\| = 0.$$

Nếu trong X mọi dãy cơ bản đều hội tụ, tức là $\|x_n - x_m\| \to 0$ kéo theo sự tồn tại $x_0 \in X$ sao cho $x_n \to x_0$ thì X được gọi là không gian đủ.

Định nghĩa 1.1.5 Không gian tiền Hilbert đầy đủ gọi là không gian Hilbert.

Ví dụ 1.1.6 Trong $\mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2 ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2 ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$, ta đưa vào tích vô hướng $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k$

do đó

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k x_k = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2.$$

Khi đó $\mathbb{R}^n$ là không gian Hilbert.

Ví dụ 1.1.7 Trong không gian $C[a,b]$ tập tất cả các hàm thực liên tục trên $[a,b]$. Xét tích vô hướng:

$$\langle x, y\rangle = \int_a^b x(t)y(t)dt,\ x(t), y(t) \in C[a,b].$$

Khi đó:

i. Không gian C[a,b] với chuẩn $\|x\| = \max\limits_{a\leqslant t\leqslant b} |x(t)|$ là không gian Banach nên $C[a,b]$ là không gian Hilbert;

ii. Không gian C[a,b] với chuẩn $\|x\| = \left(\int\limits_a^b |x(t)|^2 dt\right)^{1/2}$ không là không gian Banach do đó $C[a,b]$ không là không gian Hilbert.

Định nghĩa 1.1.8 Tập $A \subset \mathcal{H}$ gọi là tập lồi nếu $\forall x_1, x_2 \in A$ và mọi số thực $t \in [0,1]$ ta đều có

$$tx_1 + (1-t)x_2 \in A.$$

Nhận xét 1.1.9 Theo định nghĩa, tập $\emptyset$ là tập lồi.

Ví dụ 1.1.10 Các tập sau đây đều là tập lồi: $\mathbb{R}^n, \emptyset, \{x\}$, hình cầu đóng, hình cầu mở, các nửa không gian đóng, nửa không gian mở.

Định nghĩa 1.1.11 Cho $C \subset \mathcal{H}$. Bao lồi của C là giao của tất cả các tập con lồi của $\mathcal{H}$ chứa C, ký hiệu là conv C. Bao lồi đóng của C là tập con lồi đóng nhỏ nhất của $\mathcal{H}$ chứa C, ký hiệu là $\overline{\text{conv}}\, C$.

Định nghĩa 1.1.12 Tập $A \subseteq \mathbb{R}^n$ được gọi là nón có đỉnh tại gốc O nếu:

$$\forall x \in A,\ \forall \lambda > 0 \Rightarrow \lambda x \in A.$$

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ được gọi là nón có đỉnh tại x_0 nếu $A - x_0$ có đỉnh tại O. Nón A gọi là nón lồi nếu tập A là lồi.

Định nghĩa 1.1.13 Cho tập lồi $S \subseteq \mathbb{R}^n$, hàm $f : S \to (-\infty, +\infty)$ được gọi là:

i. Hàm lồi trên S nếu với mọi số thực $0 \le \lambda \le 1$, $\forall x, y \in S$, ta có:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y);$$

ii. Hàm lồi chặt trên S nếu với mọi số thực $0 \le \lambda \le 1$, $\forall x, y \in S, x \neq y$ ta có:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y);$$

iii. Hàm f được gọi là hàm lõm (lõm chặt) trên S nếu $-f$ là lồi (lồi chặt) trên S;

iv. Hàm f được gọi là tuyến tính afin trên S nếu f vừa lồi vừa lõm trên S. Một hàm afin trên $\mathbb{R}^n$ có dạng $f(x) = \langle a, x\rangle + \alpha$ với $a \in \mathbb{R}^n$, như vậy $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda \in [0,1]$ ta có:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Tuy nhiên, hàm afin không lồi chặt hay lõm chặt.

Nếu $\mathcal{H}$ là không gian Hilbert thì $\mathcal{H}$ cũng là không gian định chuẩn, không gian liên hợp của $\mathcal{H}$ là $\mathcal{H}^* = \mathcal{L}(\mathcal{H}, K)$. Định lý sau đây nêu lên đặc trưng của phiếm hàm tuyến tính liên tục trên không gian Hilbert $\mathcal{H}$.

Định lý 1.1.14 *Với mỗi véctơ a cố định thuộc không gian Hilbert $\mathcal{H}$, hệ thức:*

$$f(x) = \langle x, a\rangle, \quad \forall x \in \mathcal{H} \tag{1.1}$$

xác định một phiếm hàm tuyến tính liên tục $f(x)$ trên không gian Hilbert