ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGÔ THÙY LINH

BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN VÀ BÀI TOÁN CÂN BẰNG KINH TẾ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN – 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGÔ THÙY LINH

BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN VÀ BÀI TOÁN CÂN BẰNG KINH TẾ

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 60 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: GS.TS. Nguyễn Bường
TS. Nguyễn Thị Thu Thủy

THÁI NGUYÊN – 2016

Mục lục

Lời cảm ơn

Luận văn này được thực hiện tại Trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên và hoàn thành dưới sự hướng dẫn của GS.TS Nguyễn Bường, TS. Nguyễn Thị Thu Thủy. Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới người hướng dẫn khoa học của mình, người đã đặt vấn đề nghiên cứu, dành nhiều thời gian hướng dẫn và tận tình giải đáp những thắc mắc của tác giả trong suốt quá trình làm luận văn.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn Ban Giám hiệu, Phòng Đào tạo, Ban chủ nhiệm Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên, cùng các giảng viên tham gia giảng dạy cao học Toán của trường Đại học Khoa học đã tạo mọi điều kiện tốt nhất để tác giả học tập và nghiên cứu.

Tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn tới tập thể lớp Cao học Toán K8A (khóa 2014–2016) đã luôn động viên và giúp đỡ tác giả rất nhiều trong quá trình học tập, nghiên cứu.

Xin cảm ơn tập thể cơ quan ban ngành đã tạo điều kiện giúp đỡ tôi trong quá trình học tập thu thập tài liệu và nghiên cứu. Đặc biệt, tôi xin cảm ơn bạn bè đồng nghiệp và gia đình đã cùng chia sẻ, giúp đỡ động viên tôi trong suốt quá trình học tập và hoàn thành luận văn này.

Thái Nguyên, tháng 6 năm 2016

Tác giả

Ngô Thùy Linh

Bảng ký hiệu

Trong toàn luận văn này, ta dùng những ký hiệu với các ý nghĩa xác định trong bảng dưới đây:

$\mathbb{R}$	tập số thực
H	không gian Hilbert thực
X	không gian Banach
X^*	không gian đối ngẫu của X
C	tập con đóng lồi của H
A	toán tử đơn điệu trong không gian Hilbert
$\mathrm{dom}(A)$	miền hữu hiệu của toán tử A
$\mathrm{Fix}(S)$	tập điểm bất động của ánh xạ S
$P_C(x)$	phép chiếu trực giao của điểm x trên tập C
$\langle x, y\rangle$	tích vô hướng của hai vectơ x và y
$\delta_C(.)$	hàm chỉ trên C
$\|x\|$	chuẩn của vectơ x
$x_n \to x$	x_n hội tụ mạnh đến x
$x_n \rightharpoonup x$	x_n hội tụ yếu đến x
I	ánh xạ đơn vị

Lời nói đầu

Cho X là một không gian Banach thực phản xạ, X^* là không gian liên hợp của X, cả hai có chuẩn đều được kí hiệu là $\|.\|$, $A : X \to X^*$ là toán tử đơn điệu đơn trị và $\varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là phiếm hàm lồi chính thường nửa liên tục dưới. Với $f \in X^*$, tìm $x^0 \in X$ sao cho

$$\langle A(x^0) - f, x - x^0\rangle + \varphi(x) - \varphi(x^0) \geq 0 \quad \forall x \in X, \tag{1}$$

ở đây $\langle x^*, x\rangle$ ký hiệu giá trị phiếm hàm tuyến tính liên tục $x^* \in X^*$ tại $x \in X$. Bài toán (1) được gọi là bất đẳng thức biến phân hỗn hợp *(mixed variational inequality)*, đôi khi còn được gọi là bất đẳng thức biến phân loại hai *(variational inequality of the second kind)*.

Khi A là đạo hàm Gâteaux của một phiếm hàm lồi chính thường, nửa liên tục dưới F, $f \equiv \theta \in X^*$, thì bất đẳng thức biến phân hỗn hợp (1) tương đương với bài toán cực trị lồi không khả vi

$$\min_{x \in X} \Big\{ F(x) + \varphi(x) \Big\}. \tag{2}$$

Trường hợp riêng của bất đẳng thức biến phân hỗn hợp (1), khi φ là hàm chỉ *(indicator function)* của tập lồi đóng K trong X, là bài toán bất đẳng thức biến phân cổ điển *(classical variational inequality)*: tìm $x_0 \in K$ sao cho

$$\langle A(x^0) - f, x - x^0\rangle \geq 0 \quad \forall x \in K. \tag{3}$$

Nếu $K \equiv X$ thì bài toán có dạng phương trình toán tử

$$A(x) = f. \tag{4}$$

Mục đích của đề tài luận văn là giới thiệu bất đẳng thức biến phân hỗn hợp và bài toán cân bằng kinh tế trong không gian Banach và không gian hữu hạn chiều $\mathbb{R}^n$. Nội dung của đề tài luận văn được trình bày trong hai chương. Chương 1 có tiêu đề "Bất đẳng thức biến phân hỗn hợp trong không gian Banach" trình bày khái niệm về không gian Banach, ánh xạ đơn điệu trong không gian Banach; giới thiệu bài toán bất đẳng thức biến phân hỗn hợp trong không gian Banach, sự tồn tại nghiệm và một số trường hợp đặc biệt của bất đẳng thức biến phân hỗn hợp; phần cuối của chương giới thiệu một số phương pháp xấp xỉ nghiệm của bất đẳng thức biến phân hỗn hợp như phương pháp điểm gần kề, phương pháp hiệu chỉnh lặp, phương pháp nguyên lý bài toán phụ. Chương 2 với tiêu đề "Bất đẳng thức biến phân và bài toán cân bằng kinh tế" giới thiệu bài toán bất đẳng thức biến phân hỗn hợp trong không gian hữu hạn chiều và áp dụng bất đẳng thức biến phân hỗn hợp cho mô hình cân bằng cạnh tranh và mô hình cân bằng độc quyền trong kinh tế. Nội dung của luận văn được viết trên cơ sở tổng hợp các kiến thức từ [1], [2], [3], [4] và [6].

Chương 1

Bất đẳng thức biến phân hỗn hợp trong không gian Banach

Chương này giới thiệu bài toán bất đẳng thức biến phân hỗn hợp trong không gian Banach. Nội dung của chương được trình bày trong 3 mục. Mục 1.1 nêu khái niệm về không gian Banach phản xạ, lồi chặt, trơn và ánh xạ đơn điệu trong không gian Banach. Mục 1.2 trình bày khái niệm về bài toán bất đẳng thức biến phân hỗn hợp, nêu sự tồn tại nghiệm và một số trường hợp đặc biệt của bất đẳng thức biến phân hỗn hợp. Mục 1.3 giới thiệu một số phương pháp giải bất đẳng thức biến phân hỗn hợp. Các kiến thức của chương này được tổng hợp từ các tài liệu tham khảo [1], [2], [3], [4] và [6].

1.1 Không gian Banach

1.1.1 Không gian Banach phản xạ, lồi chặt và trơn

Cho X là một không gian tuyến tính định chuẩn.

Định nghĩa 1.1.1. Nếu không gian tuyến tính định chuẩn X là một không gian mêtric đầy đủ (với khoảng cách $d(x,y) = \|x-y\|$) thì X được gọi là không gian Banach.

Cho X là một không gian Banach với không gian đối ngẫu là X^*, tức là không gian các phiếm hàm tuyến tính liên tục trên X. Để đơn giản trong việc trình bày, chuẩn của X và X^* được ký hiệu là $\|.\|$. Ta viết $\langle x, x^* \rangle$ thay cho $x^*(x)$ với $x^* \in X^*$ và $x \in X$. Ký hiệu 2^X là một họ các tập con khác rỗng của X. Cho F là một ánh xạ với miền xác định là $\mathscr{D}(F)$ và miền giá trị là $\mathscr{R}(F)$.

Ký hiệu mặt cầu đơn vị của X là S_X, trong đó $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$.

Định nghĩa 1.1.2. Không gian Banach X được gọi là không gian phản xạ, nếu với mọi phần tử x^{**} của không gian liên hợp thứ hai X^{**} của X, đều tồn tại phần tử $x \in X$ sao cho

$$x^*(x) = x^{**}(x^*) \quad \text{với mọi} \quad x^* \in X^*.$$

Định nghĩa 1.1.3. Không gian Banach X được gọi là lồi chặt nếu với mọi $x, y \in X$, $x \neq y$ mà $\|x\| = 1$, $\|y\| = 1$ ta có

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1.$$

Chú ý 1.1.4. Định nghĩa 1.1.3 còn có thể phát biểu dưới các dạng tương đương sau: Không gian Banach X được gọi là lồi chặt nếu với mọi $x, y \in S_X$ thỏa mãn $\frac{\|x+y\|}{2} = 1$ suy ra $x = y$ hoặc với mọi $x, y \in S_X$ và $x \neq y$ ta có $\|tx + (1-t)y\| < 1$ với mọi $t \in (0,1)$.

Để đo tính lồi của không gian Banach X, người ta đưa vào khái niệm môđun lồi của không gian Banach X:

$$\delta_X(\varepsilon) = \inf \left\{ 1 - \left\| \frac{x+y}{2} \right\| : \quad \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \|x-y\| \geq \varepsilon \right\}.$$

Nhận xét 1.1.5.

(1) Môđun lồi của không gian Banach X là hàm số xác định, liên tục và tăng trên đoạn $[0;2]$.

(2) Không gian Banach X lồi chặt khi và chỉ khi $\delta_X(2) = 1$.