ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

---------------- ---------------

NGUYỄN THỊ MỴ

TOÁN TỬ TUYẾN TÍNH ĐƠN ĐIỆU MẠNH VÀ PHƯƠNG PHÁP HIỆU CHỈNH CHO BÀI TOÁN ĐẶT KHÔNG CHỈNH

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

---------------✍🕮✍---------------

NGUYỄN THỊ MỴ

TOÁN TỬ TUYẾN TÍNH ĐƠN ĐIỆU MẠNH VÀ PHƯƠNG PHÁP HIỆU CHỈNH CHO BÀI TOÁN ĐẶT KHÔNG CHỈNH

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành :Toán ứng dụng

Mã số : 60 46 01 12

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:

TS. Nguyễn Thị Thu Thủy

TS. Lâm Thùy Dương

THÁI NGUYÊN - 2016

Mục lục

Lời cảm ơn

Luận văn này được thực hiện tại Trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên và hoàn thành dưới sự hướng dẫn của TS. Nguyễn Thị Thu Thủy và TS. Lâm Thùy Dương. Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới người hướng dẫn khoa học của mình, người đã đặt vấn đề nghiên cứu, dành nhiều thời gian hướng dẫn và tận tình giải đáp những thắc mắc của tác giả trong suốt quá trình làm luận văn.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn Ban Giám hiệu, Phòng Đào tạo, Ban chủ nhiệm Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên, cùng các giảng viên tham gia giảng dạy cao học Toán của trường Đại học Khoa học đã tạo mọi điều kiện tốt nhất để tác giả học tập và nghiên cứu.

Tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn tới tập thể lớp Cao học Toán K8A (khóa 2014–2016) đã luôn động viên và giúp đỡ tác giả rất nhiều trong quá trình học tập, nghiên cứu.

Nhân dịp này, tác giả cũng xin chân thành cảm ơn gia đình, bạn bè, lãnh đạo đơn vị công tác và đồng nghiệp đã luôn động viên, giúp đỡ và tạo điều kiện tốt nhất cho tôi trong quá trình học tập, nghiên cứu và làm luận văn.

Thái Nguyên, tháng 6 năm 2016

Tác giả

Nguyễn Thị My

Bảng ký hiệu

$\mathbb{R}$	tập số thực
H	không gian Hilbert thực
X	không gian Banach
X^*	không gian đối ngẫu của X
C	tập con đóng lồi của H
A	toán tử đơn điệu trong không gian Hilbert
$\text{dom}(A)$	miền hữu hiệu của toán tử A
$\text{Fix}(S)$	tập điểm bất động của ánh xạ S
$P_C(x)$	phép chiếu mêtric của điểm x trên tập C
$\langle x, y \rangle$	tích vô hướng của hai vectơ x và y
$\delta_C(.)$	hàm chỉ trên C
$\|x\|$	chuẩn của vectơ x
$x_n \to x$	x_n hội tụ mạnh đến x
$x_n \rightharpoonup x$	x_n hội tụ yếu đến x
I	ánh xạ đơn vị của H

Lời nói đầu

Rất nhiều bài toán của thực tiễn, khoa học, công nghệ dẫn tới bài toán đặt không chỉnh *(ill-posed)* theo nghĩa Hadamard, nghĩa là bài toán (khi dữ kiện thay đổi nhỏ) hoặc không tồn tại nghiệm, hoặc nghiệm không duy nhất, hoặc nghiệm không phụ thuộc liên tục vào dữ kiện ban đầu. Do tính không ổn định này của bài toán đặt không chỉnh nên việc giải số của nó gặp khó khăn. Lý do là một sai số nhỏ trong dữ kiện của bài toán có thể dẫn đến một sai số bất kỳ trong lời giải.

Đề tài luận văn nghiên cứu bài toán đặt không chỉnh dưới dạng phương trình toán tử

$$A(x) = f, \tag{1}$$

trong đó $A : X \longrightarrow X^*$ là một toán tử đơn điệu đơn trị từ không gian Banach phản xạ X vào không gian liên hợp X^* của X. Để giải loại bài toán này, ta phải sử dụng những phương pháp ổn định, sao cho khi sai số của các dữ kiện càng nhỏ thì nghiệm xấp xỉ tìm được càng gần với nghiệm đúng của bài toán xuất phát. Năm 1963, A.N. Tikhonov [5] đưa ra phương pháp hiệu chỉnh nổi tiếng và kể từ đó lý thuyết các bài toán đặt không chỉnh được phát triển hết sức sôi động và có mặt ở hầu hết các bài toán thực tế. Nội dung chủ yếu của phương pháp này là xây dựng nghiệm hiệu chỉnh cho phương trình toán tử (1) trong không gian Hilbert thực H dựa trên việc tìm phần tử cực tiểu $x_\alpha^{h,\delta}$ của phiếm hàm Tikhonov

$$F_\alpha^{h,\delta}(x) = \|A_h(x) - f_\delta\|^2 + \alpha\|x^* - x\|^2 \tag{2}$$

trong đó $\alpha > 0$ là tham số hiệu chỉnh phụ thuộc vào h và δ, x^* là phần tử cho trước đóng vai trò là tiêu chuẩn chọn và (A_h, f_δ) là xấp xỉ của (A, f). Hai vấn đề cần được giải quyết ở đây là tìm phần tử cực tiểu của phiếm hàm Tikhonov và chọn tham số hiệu chỉnh $\alpha = \alpha(h, \delta)$ thích hợp để phần tử cực tiểu $x^{h,\delta}_{\alpha(h,\delta)}$ dần tới nghiệm chính xác của bài toán (1) khi h và δ dần tới không.

Việc tìm phần tử cực tiểu của phiếm hàm Tikhonov sẽ gặp nhiều khó khăn trong trường hợp bài toán phi tuyến. Đối với lớp bài toán phi tuyến với toán tử đơn điệu $A : X \to X^*$, F. Browder [3] đưa ra một dạng khác của phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov. Tư tưởng chủ yếu của phương pháp do F. Browder đề xuất là sử dụng một toán tử $B : X \to X^*$ có tính chất đơn điệu mạnh làm thành phần hiệu chỉnh.

Mục đích của đề tài luận văn nhằm trình bày lại phương pháp giải ổn định (phương pháp hiệu chỉnh Browder–Tikhonov) phương trình toán đơn điệu với việc sử dụng toán tử tuyến tính đơn điệu mạnh làm thành phần hiệu chỉnh trong bài báo "Regularization by linear operators" của Giáo sư Nguyễn Bường công bố trên tạp chí Acta Mathematica Vietnamica.

Nội dung của đề tài được trình bày trong hai chương. Chương 1 giới thiệu một số kiến thức cơ bản về bài toán đặt không chỉnh và phương trình toán tử đơn điệu. Chương 2 trình bày phương pháp hiệu chỉnh phương trình toán tử với toán tử tuyến tính đơn điệu mạnh.

Chương 1

Toán tử tuyến tính đơn điệu mạnh

Chương này trình bày khái niệm và một số tính chất cơ bản của không gian Banach, không gian Hilbert thực; khái niệm và tính chất của toán tử tuyến tính; toán tử đơn điệu mạnh và một số ví dụ minh họa. Các kiến thức của chương này được tham khảo từ các tài liệu [1] và [2].

1.1 Không gian Banach. Không gian Hilbert

Mục này giới thiệu khái niệm và một số tính chất của không gian Banach, không gian Hilbert và ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc.

1.1.1 Không gian Banach

Định nghĩa 1.1.1. Không gian định chuẩn là không gian tuyến tính X trong đó ứng với mỗi phần tử $x \in X$ ta có một số $\|x\|$ gọi là chuẩn của x, thỏa mãn các điều kiện sau:

(1) $\|x\| > 0$ với mọi $x \neq 0$; $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(2) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ với mọi $x, y \in X$ (bất đẳng thức tam giác);

(3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ với mọi $x \in X$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Không gian định chuẩn đầy đủ gọi là không gian Banach.

Định nghĩa 1.1.2. Không gian $L(X,\mathbb{R})$-tập tất cả các phiếm hàm tuyến tính liên tục xác định trên X được gọi là không gian liên hợp hay không gian đối ngẫu của X, ký hiệu là X^*.

Định nghĩa 1.1.3. Giả sử X là không gian định chuẩn trên $\mathbb{R}$, X^* là không gian liên hợp của X và gọi $X^{**} = L(X^*,\mathbb{R})$ là không gian liên hợp thứ hai của X. Ta cho tương ứng với mỗi $x \in X$ một phiếm hàm tuyến tính liên tục x^{**} trên X^{**} nhờ hệ thức $\langle x^{**}, f\rangle = \langle f, x\rangle$, với mọi $f \in X^{**}$. Ở đây $\langle f, x\rangle$ là ký hiệu giá trị phiếm hàm tuyến tính liên tục $f \in X^*$ tại $x \in X$. Ta có $\|x\| = \|x^{**}\|$. Đặt $h(x) = x^{**}$, nếu $h : X \longrightarrow X^{**}$ là toàn ánh thì không gian X được gọi là không gian phản xạ.

Ví dụ 1.1.4. Các không gian vectơ định chuẩn hữu hạn chiều, không gian l^p, $L^p[a,b]$, $1 < p < \infty$ là các không gian Banach phản xạ.

Định lý 1.1.5. *Cho X là một không gian Banach. Khi đó, các khẳng định sau là tương đương:*

(i) X là không gian phản xạ;

(ii) Mọi dãy bị chặn trong X đều có một dãy con hội tụ yếu.

Ký hiệu $S_X := \{x \in X : \|x\| = 1\}$ là mặt cầu đơn vị của không gian Banach X.

Định nghĩa 1.1.6. Không gian Banach X được gọi là lồi chặt nếu với mọi điểm $x, y \in S_X$, $x \neq y$, suy ra

$$\|(1-\lambda)x + \lambda y\| < 1 \quad \forall \lambda \in (0,1).$$

Điều này có nghĩa là mặt cầu đơn vị S_X không chứa đoạn thẳng nào. Điều này cũng có nghĩa là trung điểm $\dfrac{x+y}{2}$ của đoạn thẳng nối hai điểm x, y phân biệt trên mặt cầu đơn vị thì không nằm trên mặt cầu đơn vị. Nói cách khác nếu $x, y \in S_X$: $\|x\| = \|y\| = \|\frac{x+y}{2}\|$, thì $x = y$.