ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ THU THỦY

CÁC BẤT ĐẲNG THỨC RỜI RẠC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ THU THỦY

CÁC BẤT ĐẲNG THỨC RỜI RẠC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 60 46 01 13

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS.TS. TẠ DUY PHƯỢNG

Thái Nguyên - 2016

Mục lục

Mở đầu 1

Chương 1. Các bất đẳng thức rời rạc cho các bộ số **3**

1.1 Bất đẳng thức cơ bản cho hai số 3
1.2 Bất đẳng thức cơ bản cho ba số 6
1.3 Bất đẳng thức có trọng cho hai số 9
1.4 Bất đẳng thức Abel 12
1.5 Bất đẳng thức Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz cho bộ số thực 14
1.6 Bất đẳng thức Biernacki, Pidek và Ryll-Nardzewski (Bất đẳng thức BPR) 17
1.7 Bất đẳng thức Chebyshev cho bộ số 20
1.8 Bất đẳng thức Andrica-Badea 22
1.9 Bất đẳng thức Grüss có trọng 25
1.10 Bất đẳng thức Grüss cải tiến 27
1.11 Bất đẳng thức dạng Chebyshev 31
1.12 Bất đẳng thức Bruijn 38
1.13 Bất đẳng thức Daykin-Eliezer-Carlitz 39
1.14 Bất đẳng thức Wagner 42
1.15 Bất đẳng thức Pólya-Szegö 44
1.16 Bất đẳng thức Cassels 46
1.17 Bất đẳng thức Hölder cho bộ số thực 50
1.18 Bất đẳng thức Minkovskii cho bộ số thực 53
1.19 Ứng dụng trong toán phổ thông của các bất đẳng thức rời rạc cho các bộ số 55

Chương 2. Bất đẳng thức rời rạc cho hàm lồi **67**

2.1 Bất đẳng thức Jensen rời rạc 68
2.2 Bất đẳng thức Jensen ngược cho hàm lồi khả vi 69
2.3 Bất đẳng thức Petrović cho hàm lồi 70
2.4 Bất đẳng thức Jensen cho hàm khả vi cấp hai 73

2.5 Bất đẳng thức Slater cho hàm lồi không khả vi 75
2.6 Bất đẳng thức Jensen cho tổng kép 77
2.7 Ứng dụng của các bất đẳng thức rời rạc cho hàm lồi trong toán phổ thông 79

Kết luận 87

Tài liệu tham khảo 88

Mở đầu

Bất đẳng thức là một trong những vấn đề khó của toán sơ cấp, đòi hỏi tính tư duy và tính sáng tạo cao. Bất đẳng thức là một chuyên đề quan trọng trong chương trình chuyên toán của các trường THPT chuyên, bởi đây là đề tài rất hấp dẫn, liên quan đến nhiều bài toán khác, như bài toán tối ưu, giải phương trình và bất phương trình, là lĩnh vực dễ sáng tạo ra bài toán mới.

Trong khuôn khổ của luận văn tôi trình bày chứng minh một lượng lớn các bất đẳng thức (BĐT) rời rạc quan trọng, trong đó nhiều bất đẳng thức chưa được biết đến rộng rãi như BĐT Bruijn; BĐT Biernacki-Pidek-Ryll-Nardzewski, BĐT Grüss, BĐT Daykin-Eliezer-Carlitz,.... Một số bất đẳng thức quen thuộc (Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz, Chebysev, Hölder,...) cũng được làm mới và cải tiến. Luận văn được tổng hợp chủ yếu từ cuốn sách của Pietro Cerone, Sever S. Dragomir [5] cùng với một số tài liệu khác.

Mục đích của luận văn là trình bày tổng quan về các bất đẳng thức rời rạc. Ngoài phần mở đầu và kết luận thì luận văn được bố cục theo hai chương với nội dung như sau:

Chương 1: Trình bày chứng minh một số bất đẳng thức cho các bộ số rời rạc quan trọng, cùng với những bình luận, trích dẫn tài liệu nhằm làm rõ bức tranh tổng thể về các bất đẳng thức này. Trong chương này tôi cũng trình bày một số ví dụ minh họa cho việc áp dụng một số bất đẳng thức đó vào việc giải các bài toán trung học phổ thông.

Chương 2: Trình bày chứng minh một số bất đẳng thức rời rạc cho hàm lồi, đồng thời một số ví dụ ứng dụng trong toán phổ thông cũng được đưa ra.

Luận văn được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên, dưới sự hướng dẫn của thầy PGS. TS. Tạ Duy Phượng. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và lời cảm ơn sâu sắc nhất tới Thầy, người đã định hướng giúp đỡ tôi rất nhiều trong quá trình làm luận văn.

Trong quá trình học tập và làm luận văn, từ những bài giảng của các Giáo sư, Phó Giáo sư công tác tại Viện Toán học và các Thầy Cô trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên, tôi đã trau dồi thêm được rất nhiều kiến thức. Tôi xin gửi lời cảm ơn sâu sắc đến các Thầy Cô.

Tôi xin cảm ơn Ban Giám hiệu Trường THPT Chu Văn An, Yên Bái đã luôn tạo điều kiện về thời gian và tinh thần để tôi hoàn thành nhiệm vụ học tập của mình.

Tôi cũng xin gửi những lời cảm ơn đặc biệt nhất tới đại gia đình thân yêu, bạn bè và các anh chị em đồng nghiệp, những người luôn động viên khích lệ giúp tôi hoàn thành luận văn này.

Thái Nguyên, tháng 5 năm 2016

Tác giả

Nguyễn Thị Thu Thủy

Chương 1

Các bất đẳng thức rời rạc cho các bộ số

Chương 1 trình bày chứng minh một số bất đẳng thức rời rạc quan trọng, cùng với những bình luận và trích dẫn tài liệu nhằm làm rõ bức tranh tổng thể về các bất đẳng thức này.

1.1 Bất đẳng thức cơ bản cho hai số

Với mọi số dương a và b, ta luôn có

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}. \tag{1.1}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Chứng minh. Vì $a, b > 0$ nên ta có thể viết $a = x^2, b = y^2$ với $x, y > 0$. Ta có

$$\frac{x^2+y^2}{2} \geq xy. \tag{1.2}$$

Điều này tương đương với

$$(x-y)^2 \geq 0. \tag{1.3}$$

Rõ ràng, (1.3) luôn đúng với mọi x, y. Tức là, bất đẳng thức thứ nhất trong (1.1) được chứng minh. Chia bất đẳng thức (1.1) cho ab ta nhận được

$$\frac{\frac{a+b}{2}}{ab} \geq \frac{\sqrt{ab}}{ab} = \frac{1}{\sqrt{ab}}. \tag{1.4}$$

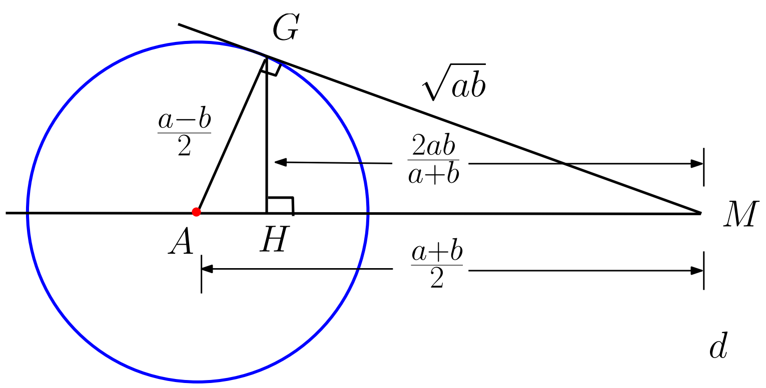
Dễ dàng thấy rằng, (1.4) tương đương với bất đẳng thức thứ hai trong (1.1) và dấu bằng trong (1.3) xảy ra khi và chỉ khi $x = y$. Điều này có nghĩa là $a = b$ trong (1.1). □

Nhận xét 1.1.1. ([5, p. 2]) Bất đẳng thức (1.1) có thể được chứng minh bằng hình học như sau. Trước hết ta có

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}.$$

Ta viết lại bất đẳng thức (1.1) dưới dạng

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$



Hình 1.1:

Không hạn chế tổng quát, coi $a > b$. Dựng đường tròn tâm A bán kính $\frac{a-b}{2}$ (Hình 1.1). Trên đường thẳng Ax bất kì lấy điểm M sao cho độ dài $AM = \dfrac{a+b}{2}$. Từ M kẻ tiếp tuyến với đường tròn, gọi tiếp điểm là G. Từ G kẻ $GH \perp Ax$. Sử dụng công thức Pythagoras cho tam giác vuông AGM ta tính được độ dài các cạnh

$$AM = \frac{a+b}{2},\ GM = \sqrt{AM^2 - AG^2} = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{ab},$$

$$HM = \frac{GM^2}{AM} = \frac{ab}{\dfrac{a+b}{2}} = \frac{2ab}{a+b}.$$

Mặt khác, dựa vào tính chất của tam giác, ta có

$$HM \leq GM \leq AM.$$

Suy ra

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Nếu ta cho phép bán kính của đường tròn dần về 0, thì G dần tới A, ta thu được dấu bằng trong bất đẳng thức trên.

Nhận xét 1.1.2. ([5, p. 2]) Bất đẳng thức (1.3) là bất đẳng thức cơ bản của các số thực. Bất đẳng thức này có thể được cải tiến như sau. Đặt

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1 & \text{khi } \ x > 0, \\ 0 & \text{khi } \ x = 0, \\ -1 & \text{khi } \ x < 0. \end{cases}$$

Khi ấy

$$|x| = x \operatorname{sgn}(x) \ \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}. \tag{1.5}$$

Ta có,

$$x^2 - 2xy + y^2 \geq |x^2 \operatorname{sgn}(x) + y^2 \operatorname{sgn}(y) - xy[\operatorname{sgn}(x) + \operatorname{sgn}(y)]| \geq 0 \tag{1.6}$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Thật vậy, ta có $|z - t| \geq ||z| - |t||$ với mọi $z, t \in \mathbb{R}$. Do đó ta có

$$\begin{aligned} x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 &= |x-y||x-y| \geq |x-y|||x| - |y|| \\ &= |(x-y)(|x|-|y|)| = \big|x|x| - y|y| - x|y| - |x|y\big|. \quad (1.7) \end{aligned}$$

Thay (1.5) vào (1.7) ta thu được (1.6).

Cả hai dấu bằng của (1.6) xảy ra đồng thời khi và chỉ khi $x = y$.

Nhận xét 1.1.3. ([5, p. 3]) Bất đẳng thức (1.6) cũng đúng cho các số phức z, w, cụ thể

$$|z|^2 - 2\,\mathrm{Re}(zw)|w|^2 \geq |z|z| + w|w| - z|w| - |z|w| \geq 0. \quad (1.8)$$

Thật vậy,

$$\begin{aligned} |z-w|^2 &= (z-w)\overline{(z-w)} = (z-w)(\overline{z} - \overline{w}) = z\overline{z} + w\overline{w} - z\overline{w} - \overline{z}w \\ &= |z|^2 + |w|^2 - 2\,\mathrm{Re}(zw). \end{aligned}$$

Tương tự chứng minh nhận xét 1.1.2, ta có

$$|z-w|^2 \geq ||z| - |w|||z-w| = \big|z|z| + w|w| - z|w| - |z|w\big| \geq 0.$$

Dấu bằng xảy ra ở cả hai dấu bất đẳng thức của (1.8) khi và chỉ khi $z = w$.

1.2 Bất đẳng thức cơ bản cho ba số

Với mọi bộ ba số dương a, b và c, ta luôn có

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \geq \frac{3}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}}. \quad (1.9)$$