ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐẶNG VĂN PHÚ

TRỤC ĐẲNG PHƯƠNG, PHƯƠNG TÍCH VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐẶNG VĂN PHÚ

TRỤC ĐẲNG PHƯƠNG, PHƯƠNG TÍCH VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 60 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

PGS.TS. TRẦN TRUNG

Thái Nguyên - 2015

Mục lục

Lời cảm ơn

Luận văn được thực hiện và hoàn thành tại Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn khoa học của PGS.TS. Trần Trung. Qua đây em xin được gửi lời cảm ơn sâu sắc đến thầy giáo, người hướng dẫn khoa học của mình, PGS.TS. Trần Trung, người đã đưa ra đề tài và dành nhiều thời gian tận tình hướng dẫn, giải đáp những thắc mắc của em trong suốt quá trình nghiên cứu. Em xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến Thầy.

Em xin trân trọng cảm ơn các thầy cô giảng dạy và Phòng Đào tạo thuộc Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã tạo mọi điều kiện tốt nhất để em được theo học lớp học. Đồng thời tôi xin gửi lời cảm ơn tới tập thể lớp Cao học Toán 7D khóa 1/2014 - 1/2016 đã động viên giúp đỡ tôi trong quá trình học tập và làm luận văn này.

Tôi xin chân thành cảm ơn Sở Giáo dục và Đào tạo Hải Dương, Ban Giám hiệu và các đồng nghiệp Trường THCS Quang Trung - Kinh Môn - Hải Dương đã tạo điều kiện cho tôi học tập và hoàn thành kế hoạch học tập.

Tôi cảm ơn gia đình và bạn bè đã động viên giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập và làm luận văn.

Thái Nguyên, tháng 11 năm 2015

Đặng Văn Phú

Học viên Cao học Toán 7D

Trường ĐH Khoa học - ĐH Thái Nguyên

Mở đầu

Trong hình học phẳng, phương tích, trục đẳng phương và tâm đẳng phương là một vấn đề khá quen thuộc và được ứng dụng nhiều trong việc giải toán. Nói đến chủ đề này, ta có thể hiểu một cách đơn giản đó là những định nghĩa, tính chất và ứng dụng liên quan đến việc xét vị trí tương đối của điểm cố định với đường tròn, tập hợp điểm với đường tròn, đường tròn với đường tròn. Phương tích, trục đẳng phương, tâm đẳng phương là một chuỗi sự phát triển các mối quan hệ trên. Những kiến thức này khá đơn giản và dễ hiểu nhưng ứng dụng của nó thì rất đa dạng, phong phú và nhiều khi đó là phương pháp tối ưu cho các bài toán hình học. Một khi chúng ta đã nắm vững cũng như hiểu rõ về vấn đề này, việc áp dụng vào giải toán trở nên thuận tiện hơn bao giờ hết.

Một số ứng dụng của phương tích, trục đẳng phương và tâm đẳng phương có thể kể đến như tập hợp các điểm, góc, khoảng cách, điểm cố định, đường cố định, chứng minh hệ thức, các bài toán về sự thẳng hàng, đồng quy, vuông góc, dựng hình, cực trị hình học,... Chúng ta sẽ có một lợi thế không nhỏ khi sử dụng vấn đề toán học này để giải những bài toán liên quan đến các vấn đề trên bởi một mặt giúp người học hạn chế nghiệm và các trường hợp của bài toán, làm cho bài toán trở nên nhẹ nhàng hơn trong cách gọi ẩn và các tình huống có thể xảy ra, mặt khác nó giúp lời giải của bài toán trở nên hay, đẹp hơn và tạo nên sự tối ưu trong việc giải quyết các yêu cầu của đề bài.

Với những lý do trên, cùng với sự quan tâm và muốn đi sâu hơn về vấn đề này chúng tôi đã chọn đề tài ***Trục đẳng phương, phương tích và một số ứng dụng*** cho luận văn. Do nhiều yếu tố chủ quan và khách quan, nội dung của bài viết có thể còn nhiều khiếm khuyết, rất mong nhận được ý kiến đóng góp của quý thầy cô và bạn bè đồng nghiệp.

Cấu trúc luận văn

Nội dung chính của luận văn được trình bày thành 2 chương:

• Chương 1: Kiến thức cơ sở. Trong chương này, chúng tôi trình bày một cách sơ lược về phương tích của một điểm với một đường tròn, trục đẳng phương của hai đường tròn và tâm đẳng phương mà sẽ được sử dụng trong các chương tiếp theo.

• Chương 2: Một số ứng dụng của phương tích và trục đẳng phương. Trong chương này chúng tôi trình bày ứng dụng của phương tích, trục đẳng phương và tâm đẳng phương vào chứng minh đồng quy, chứng minh điểm cố định, chứng minh các điểm cùng thuộc một đường tròn, chứng minh các điểm cùng nằm trên một đường thẳng cố định, chứng minh thẳng hàng, chứng minh vuông góc và song song ...

Thái Nguyên, tháng 11 năm 2015

Đặng Văn Phú

Chương 1

Kiến thức cơ sở

1.1 Phương tích của một điểm với một đường tròn

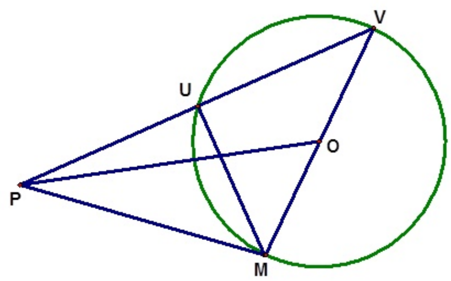
1.1.1 Định nghĩa và ví dụ

Định lí 1.1.1. *[1] Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm P cố định, $OP = d$. Qua P kẻ đường thẳng cắt đường tròn tại hai điểm U và V. Khi đó giá trị*

$$\overline{PU}.\overline{PV} = PO^2 - R^2 = d^2 - R^2$$

không phụ thuộc vào vị trí của đường thẳng.

Chứng minh. (Hình 1.1) Gọi M là điểm đối xứng của V qua O. Ta có MU vuông góc với PV hay U là hình chiếu của M trên PV. Suy ra



Hình 1.1

$$\begin{aligned}
\overline{PU}.\overline{PV} &= \overrightarrow{PU}.\overrightarrow{PV} = \overrightarrow{PM}.\overrightarrow{PV} \\
&= (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM})(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OV}) \\
&= (\overrightarrow{PO} - \overrightarrow{OV})(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OV}) \\
&= \overrightarrow{PO}^2 - \overrightarrow{OV}^2 = OP^2 - OV^2 = d^2 - R^2.
\end{aligned}$$

Định nghĩa 1.1.1. [1] Giá trị không đổi $\overline{PU}.\overline{PV} = PO^2 - R^2 = d^2 - R^2$ được gọi là phương tích của điểm P đối với đường tròn (O) và ký hiệu là $\mathscr{P}_{P/(O)}$.

Định lí 1.1.2. *[1] Nếu 2 đường thẳng AB và CD cắt nhau tại P và*

$$\overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PC}.\overline{PD}$$

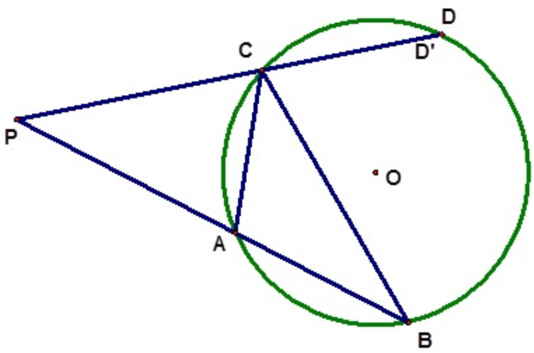
thì 4 điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.

Chứng minh. (Hình 1.2) Giả sử đường tròn ngoại tiếp ΔABC cắt CD tại D' khi đó

$$\overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PO}.\overline{PD'}$$

$$\Rightarrow \overline{PD} = \overline{PD'} \Rightarrow D \equiv D'.$$

Vậy 4 điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.



Hình 1.2

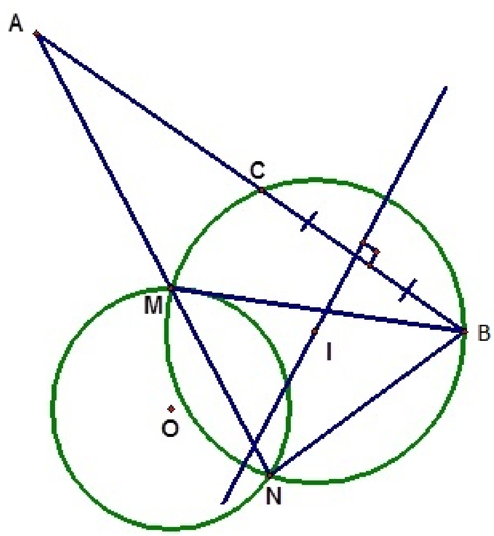
Ví dụ 1.1.1. Cho đường tròn (O) và 2 điểm A, B cố định. Một đường thẳng quay quanh A cắt (O) tại M và N. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN thuộc một đường thẳng.

Giải. (Hình 1.3) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN và C là giao điểm của AB với (I). Khi đó

$\mathscr{P}_{A/(I)} = \overline{AC}.\overline{AB} = \overline{AM}.\overline{AN} = \mathscr{P}_{A/(O)}$

không đổi vì A, O cố định.

Suy ra $\overline{AC} = \dfrac{\mathscr{P}_{A/(O)}}{AB}$. Vì A, B cố định và C thuộc AB nên từ hệ thức trên suy ra điểm C cố định. Do đó I thuộc đường trung trực của BC cố định.



Hình 1.3

1.1.2 Các tính chất

Tính chất 1.1.1. *Nếu điểm M nằm ngoài đường tròn (O) và MT là tiếp tuyến của (O) thì $\mathscr{P}_{M/(O)} = MT^2$.*

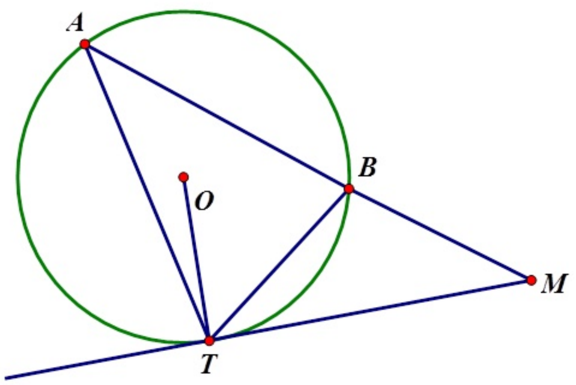
Tính chất 1.1.2. *Nếu hai điểm A, B cố định và $\overline{AB}.\overline{AM}$ là hằng số thì M cố định.*

Tính chất 1.1.3. *+ Điểm M nằm bên ngoài đường tròn (O) khi và chỉ khi $\mathscr{P}_{M/(O)} > 0$.*

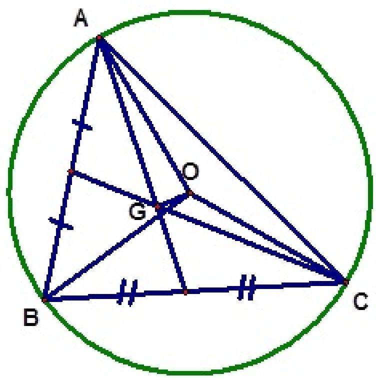
+ Điểm M nằm trên đường tròn (O) khi và chỉ khi $\mathscr{P}_{M/(O)} = 0$.

+ Điểm M nằm bên trong đường tròn (O) khi và chỉ khi $\mathscr{P}_{M/(O)} < 0$.

Tính chất 1.1.4. *(Hình 1.4) Cho hai đường thẳng AB, MT phân biệt cắt nhau tại M (M không trùng A, B, T). Khi đó nếu $\overline{MA}.\overline{MB} = MT^2$ thì đường tròn ngoại tiếp tam giác ABT tiếp xúc với MT tại T.*



Hình 1.4:



Hình 1.5:

Ví dụ 1.1.2. Cho ABC nội tiếp đường tròn (O, R) và G là trọng tâm củaABC. Chứng minh rằng $\mathscr{P}_{G/(O)} = -\dfrac{1}{9}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$.

Giải. (Hình 1.5) Vì G là trọng tâm của ABC nên $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, suy ra $9OG^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + 2(\overline{OA}.\overline{OB} + \overline{OB}.\overline{OC} + \overline{OC}.\overline{OA})$

$$= 3R^2 + 2(\overline{OA}.\overline{OB} + \overline{OB}.\overline{OC} + \overline{OC}.\overline{OA}). \quad (1)$$