ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐÀO THỊ NGÂN

ỨNG DỤNG ĐỊNH LÍ CƠ BẢN CỦA ĐẠI SỐ ĐỂ XÉT TÍNH BẤT KHẢ QUY CỦA ĐA THỨC TRÊN TRƯỜNG HỮU TỶ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐÀO THỊ NGÂN

ỨNG DỤNG ĐỊNH LÍ CƠ BẢN CỦA ĐẠI SỐ ĐỂ XÉT TÍNH BẤT KHẢ QUY CỦA ĐA THỨC TRÊN TRƯỜNG HỮU TỶ

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 60 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

GS.TS. LÊ THỊ THANH NHÀN

Thái Nguyên - 2015

Mục lục

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc với GS.TS. Lê Thị Thanh Nhàn, đã trực tiếp hướng dẫn tận tình và động viên tác giả trong suốt thời gian nghiên cứu vừa qua.

Tác giả xin chân thành cảm ơn các Thầy cô thuộc Khoa Toán - Tin, trường Đại học Khoa học và GS.TSKH. Hà Huy Khoái, GS.TSKH. Nguyễn Văn Mậu, PGS.TS. Đàm Văn Nhỉ đã giảng dạy, trang bị cho chúng em những kiến thức cơ bản, cần thiết. Xin chân thành cảm ơn Phòng Đào tạo, trường Đại học Khoa học đã tạo điều kiện thuận lợi, động viên, khuyến khích tác giả trong suốt quá trình học tập.

Tác giả cũng xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới gia đình và người thân luôn khuyến khích, động viên tác giả trong suốt quá trình học tập và làm luận văn.

Thái Nguyên, 2015 **Đào Thị Ngân**

Học viên Cao học Toán K7D,

Trường ĐH Khoa học - ĐH Thái Nguyên

Mở đầu

Định lí cơ bản của Đại số phát biểu rằng mỗi đa thức một biến khác hằng với hệ số phức có ít nhất một nghiệm phức. Chứng minh đầu tiên cho Định lí cơ bản của đại số thuộc về D'Alembert năm 1748. Nhiều chứng minh khác được công bố bởi Euler năm 1749, Foncenex năm 1759, Lagrange 1772, Laplace năm 1795 ... nhưng các chứng minh này đều không chính xác. Đặc biệt, trong suốt cuộc đời mình, Gauss đã đưa ra 4 chứng minh cho Định lí, chứng minh đầu tiên năm 1799 và 2 chứng minh tiếp theo năm 1815, 1816 đều không chặt chẽ. Chứng minh hoàn chỉnh đầu tiên cho Định lí thuộc về Gauss năm 1846, được công bố chỉ vài năm trước khi ông qua đời.

Tên của Định lí cơ bản của đại số được đặt vào thời điểm khi mà quan tâm chính của đại số là vấn đề giải phương trình đa thức. Định lí cơ bản của đại số có những ứng dụng quan trọng trong nhiều lĩnh vực khác nhau của toán học. Đối với hình học đại số, sự kết hợp giữa Định lí cơ bản của đại số và Nguyên lí Lefschetz cho thấy không gian xạ ảnh phức là môi trường đủ tốt để nghiên cứu nhiều bài toán của hình học đại số với đặc số 0. Trong đại số hiện đại, việc phân loại các cấu trúc đại số trên trường địa phương và toàn cục phải sử dụng thường xuyên một kết quả được suy ra từ Định lí cơ bản của đại số, đó là: Nếu K là một trường mở rộng hữu hạn của trường số phức $\mathbb{C}$ thì $K = \mathbb{C}$.

Cho K là một trường và $f(x)$ là đa thức một biến x với hệ số trong K. Ta nói $f(x)$ là đa thức *bất khả quy trên* K nếu $f(x)$ có bậc dương và $f(x)$ không là tích của hai đa thức với bậc bé hơn. Có thể nói, các đa thức bất khả quy trong lí thuyết đa thức có vai trò quan trọng tương tự như vai trò của các số nguyên tố trong lí thuyết số. Vì thế, bài toán xét tính bất khả quy của đa thức là một trong những bài toán quan trọng nhất của lí thuyết đa thức. Từ Định lí cơ bản của đại số, ta suy ra rằng các đa thức bất khả quy trên $\mathbb{C}$ là và chỉ là các đa thức bậc nhất; các đa thức bất khả quy trên $\mathbb{R}$ là và chỉ là các đa thức bậc nhất hoặc bậc hai vô nghiệm (thực). Tuy nhiên, bài toán xét tính bất khả quy trên $\mathbb{Q}$ cho đến nay vẫn là bài toán mở. Mục đích của luận văn này là trình bày một ứng dụng của Định lí cơ bản của đại số trong vấn đề xét tính bất khả quy của đa thức trên $\mathbb{Q}$.

Luận văn được viết dựa vào hai bài báo gần đây:

1. A. I. Bonciocat, N. C. Bonciocat, and A. Zaharescu, On the irreducibility of polynomials that take a prime power value, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie, 54 (2011), 41-54.

2. M. R. Murty, Prime numbers and irreducible polynomials, The American Math. Monthly, 109 (2002), 452-458.

Luận văn được chia thành 2 chương với nội dung chính như sau:

Chương 1 trình bày một số kiến thức cơ bản về đa thức đối xứng và sự tồn tại trường phân rã của đa thức với hệ số trên một trường để phục vụ chứng minh Định lí cơ bản của đại số về sự tồn tại nghiệm của đa thức một biến trên trường số phức. Cuối chương 1 chúng tôi sử dụng Định lý cơ bản của đại số để xét tính bất khả quy của đa thức trên trường phức $\mathbb{C}$ và trên trường thực $\mathbb{R}$.

Chương 2 là nội dung chính của luận văn, trình bày một số tiêu chuẩn bất khả quy của đa thức trên $\mathbb{Q}$, mà chứng minh các tiêu chuẩn này phải sử dụng Định lí cơ bản của đại số.

Thái Nguyên, ngày 20 tháng 11 năm 2015

Đào Thị Ngân

Email: daothingangktd2002@gmail.com

Chương 1

Định lí cơ bản của đại số

Chương này trình bày một số kiến thức cơ bản về đa thức đối xứng và chứng minh Định lý cơ bản của đại số về sự tồn tại nghiệm của đa thức một biến trên trường số phức. Từ đó ứng dụng để xét tính bất quy của đa thức trên $\mathbb{C}$ và trên trường thực $\mathbb{R}$.

1.1 Đa thức đối xứng

Trước hết, ta nhắc lại khái niệm về vành đa thức nhiều biến.Trong suốt chương này, luôn giả thiết V là một vành giao hoán.

Định nghĩa 1.1.1. Kí hiệu $V[x_1, \ldots, x_n]$ là tập các đa thức n biến $x_1, \ldots, x_n$ với các hệ số trong V. Với $i, j \in \mathbb{N}_0^n$, trong đó $i = (i_1, \ldots, i_n)$ và $j = (j_1, \ldots, j_n)$, ta định nghĩa $i + j = (i_1 + j_1, \ldots, i_n + j_n)$. Khi đó $V[x_1, \ldots, x_n]$ là một vành với phép cộng và phép nhân

$$\sum_{i\in\mathbb{N}_0^n} a_i x^i + \sum_{i\in\mathbb{N}_0^n} b_i x^i = \sum_{i\in\mathbb{N}_0^n} (a_i + b_i) x^i;$$
$$\sum_{i\in\mathbb{N}_0^n} a_i x^i \sum_{i\in\mathbb{N}_0^n} b_i x^i = \sum_{i\in\mathbb{N}_0^n} c_k x^k, \ \ c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$$

với mọi đa thức $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}_0^n} a_i x^i, \ \sum\limits_{i\in\mathbb{N}_0^n} b_i x^i \in V[x_1, \ldots, x_n]$. Vành $V[x_1, \ldots, x_n]$ được gọi là vành đa thức n biến $x_1, \ldots, x_n$ với hệ số trong V.

Từ bây giờ ta luôn giả thiết V là miền nguyên, $V[x_1, \ldots, x_n]$ là vành đa thức n biến $x_1, \ldots, x_n$ với hệ số trong V và S_n là tập các song ánh từ tập $\{1, 2, \ldots, n\}$ đến chính nó.

Định nghĩa 1.1.2. Đa thức $f(x_1, \ldots, x_n) \in V[x_1, \ldots, x_n]$ được gọi là *đa thức đối xứng* nếu $f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)})$ với mọi $\pi \in S_n$, trong đó ta hiểu $f(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)})$ là đa thức được suy ra từ $f(x_1, \ldots, x_n)$ bằng cách thay x_i bởi $x_{\pi(i)}$ với mọi $i = 1, \ldots, n$.

Ví dụ 1.1.3. Các đa thức sau là các đa thức đối xứng đơn giản nhất, do đó ta gọi chúng là các đa thức đối xứng sơ cấp hay đa thức đối xứng cơ bản:

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + \cdots + x_n;$$
$$\sigma_2 = \sum_{i<j} x_i x_j = x_1x_2 + \cdots + x_1x_n + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n;$$

....

$$\sigma_k = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n};$$

....

$$\sigma_n = x_1x_2\ldots x_n.$$

Mệnh đề 1.1.4. *Tập các đa thức đối xứng lập thành một vành con của* $V[x_1, \ldots, x_n]$.

Chứng minh. Xem chứng minh trong Mệnh đề 3.2.3 trong [1]. □

Chú ý rằng đa thức của các đa thức đối xứng cơ bản luôn là đa thức đối xứng, tức là nếu $f(x_1, \ldots, x_n)$ là một đa thức thì $f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ là đa thức đối xứng. Trong mục này, ta sẽ chứng minh điều ngược lại: Nếu $f(x_1, \ldots, x_n)$ là một đa thức đối xứng thì nó biểu diễn được thành một đa thức của các đa thức đối xứng cơ bản, tức là tồn tại một đa thức $g(x_1, \ldots, x_n)$ sao cho

$f(x_1,\ldots,x_n) = g(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$. Để chứng minh kết quả này, chúng ta cần sắp xếp một đa thức thành tổng của các từ từ cao xuống thấp. Chúng ta không thể sử dụng bậc thông thường để sắp xếp vì trong một đa thức có thể có nhiều từ có cùng bậc, chẳng hạn đa thức $f(x_1,x_2) = 3x_1^6 - 2x_1x_2 + 7x_1^2 + 5x_2^2 \in \mathbb{Q}[x_1,x_2]$ có đến 3 từ không đồng dạng có cùng bậc 2. Dưới đây ta sẽ giới thiệu một cách sắp xếp các đơn thức, được gọi là thứ tự từ điển, cho phép chúng ta sắp xếp được các từ để thực hiện được điều mong muốn. bỏ hệ số a

Định nghĩa 1.1.5 (Thứ tự từ điển)**.** Cho $u = x_1^{i_1}\ldots x_n^{i_n}$ và $v = x_1^{j_1}\ldots x_n^{j_n}$ là hai đơn thức. Ta nói $u < v$ nếu tồn tại $m \in \{1,\ldots,n\}$ sao cho $i_m < j_m$ và $i_t = j_t$ với mọi $t < m$.

Trong suốt tiết này ta kí hiệu $\mathrm{mon}(U)$ là tập các đơn thức n biến $x_1, ..., x_n$.

Bổ đề 1.1.6. *Với hai đơn thức $u, v \in \mathrm{mon}(U)$, ta nói $u = v$ hoặc $u < v$ theo thứ tự từ điển trong Định nghĩa* 1.1.5*. Khi đó $\leq$ là một quan hệ thứ tự toàn phần trên tập $\mathrm{mon}(U)$ và các tính chất sau thỏa mãn:*

a) Mỗi tập con không rỗng của $\mathrm{mon}(U)$ đều có phần tử nhỏ nhất;

b) Nếu $u \leq v$ thì $uw \leq vw$ với mọi $u, v, w \in \mathrm{mon}(U)$.

Chứng minh. Xem chứng minh trong Bổ đề 3.2.5 trong [1]. □

Theo Bổ đề 1.1.6, thứ tự từ điển trên tập $\mathrm{mon}(U)$ là thứ tự toàn phần, vì thế ta có thể viết mỗi đa thức $f(x_1,\ldots,x_n) \in V[x_1,\ldots,x_n]$ thành tổng của hữu hạn từ không đồng dạng từ cao xuống thấp. Kí hiệu in(f) là từ lớn nhất trong các từ của $f(x_1,\ldots,x_n)$. Ta gọi in(f) là *từ dấu* của $f(x_1,\ldots,x_n)$. Từ Bổ đề 1.1.6 $b)$ ta có hệ quả sau.

Hệ quả 1.1.7. *Cho $f(x_1,\ldots,x_n)$ và $g(x_1,\ldots,x_n)$ là hai đa thức. Nếu V là miền nguyên thì in(fg) =in(f)in(g).*

Định lý sau đây thường được gọi là Định lý cơ bản của đa thức đối xứng.

Định lí 1.1.8. *Cho $f(x_1, \ldots, x_n) \in V[x_1, \ldots, x_n]$ là một đa thức đối xứng. Khi đó, tồn tại duy nhất một đa thức $\varphi \in V[x_1, \ldots, x_n]$ sao cho*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n).$$

Chứng minh. Xem chứng minh trong Định lý 3.2.7 trong [1]. □

Hệ quả 1.1.9. *Cho V là miền nguyên và $f(x) \in V[x]$ là đa thức (một biến x) bậc n với hệ số cao nhất khả nghịch. Giả sử $f(x)$ có n nghiệm $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ trong một miền nguyên chứa V. Cho $g(x_1, \ldots, x_n) \in V[x_1, \ldots, x_n]$ là một đa thức đối xứng. Khi đó $g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in V$.*

Chứng minh. Giả sử $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$. Theo Định lý 1.1.8 tồn tại đa thức $h(x_1, \ldots, x_n) \in V[x_1, \ldots, x_n]$ sao cho $g(x_1, \ldots, x_n) = h(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$. Vì thế

$$g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = h(\sigma_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \ldots, \sigma_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)).$$

Theo công thức Viet ta có

$$g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = h(-a_{n-1}a_n^{-1}, \ldots, (-1)^k a_{n-k}a_n^{-1}, \ldots, (-1)^n a_0 a_n^{-1}).$$

Do $a_n^{-1}, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0 \in V$ nên $g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in V$. □

Tiếp theo, chúng ta chứng minh các đồng nhất thức của Newton về biểu diễn đa thức đối xứng $x_1^k + \cdots + x_n^k$ qua các đa thức đối xứng cơ bản.

Định lí 1.1.10 (Đồng nhất thức của Newton)**.** *Đặt $w_k = x_1^k + \cdots + x_n^k$ với $k \in \mathbb{N}$. Khi đó*

a) Nếu $k \le n$ thì $w_k = (-1)^{k+1}k\sigma_k + \sum\limits_{r=1}^{k-1}(-1)^{r+1}\sigma_r w_{k-r}$.

b) Nếu $k > n$ thì $w_k = \sum\limits_{r=1}^{k-1}(-1)^n\sigma_r w_{k-r}$.