ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM THỊ HUỆ

ỔN ĐỊNH HỮU HẠN HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên-2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM THỊ HUỆ

ỔN ĐỊNH HỮU HẠN HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 60 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
GS.TSKH.VŨ NGỌC PHÁT

Thái Nguyên-2015

Mục lục

KÍ HIỆU TOÁN HỌC

$\mathbb{R}$	tập các số thực
$\mathbb{R}^+$	tập các số thực không âm
$\mathbb{R}^{n\times r}$	không gian các ma trận thực cỡ $(n \times r)$
$L_2([0,T],\mathbb{R}^m)$	không gian các hàm khả tích bình phương trên đoạn $[0,T]$ nhận giá trị trong $\mathbb{R}^m$
$C([-r,0],\mathbb{R}^m)$	không gian các hàm liên tục trên$[-r,0]$ nhận giá trị trong $\mathbb{R}^m$
I_l	ma trận đơn vị cỡ $(l \times l)$
A^T	ma trận chuyển vị của ma trận A
$A > 0$	ma trận A xác định dương, tức là $\langle Ax, x\rangle > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$
$A > B$	nghĩa là $A - B$ xác định dương
$\lambda(A)$	tập hợp tất cả các giá trị riêng của ma trận A
$\lambda_{\max}(A)$	$\lambda_{\max}(A) = \max\{Re\lambda : \lambda \in \lambda(A)\}$
$\lambda_{\min}(A)$	$\lambda_{\min}(A) = \min\{Re\lambda : \lambda \in \lambda(A)\}$
$\|A\|$	$\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^TA)}$
$\mathcal{K}$	tập hợp các hàm liên tục tăng chặt $a(.) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, a(0) = 0$
$diag(R(t), \Gamma_K(t)))$	ma trận chéo khối $\begin{bmatrix} R(t) & 0 \\ 0 & \Gamma_K(t) \end{bmatrix}$

MỞ ĐẦU

Nghiên cứu tính ổn định là nội dung chính của lý thuyết định tính các hệ động lực, được bắt đầu từ cuối thế kỷ XIX với những công trình xuất sắc của nhà toán học Nga A.M.Lyapunov. Mỗi khi phân tích và thiết kế các hệ thống kỹ thuật hoặc mô hình kinh tế mô tả bằng các phương trình toán học người ta cần nghiên cứu tính ổn định của hệ thống đó. Cho đến nay, tính ổn định đã được nghiên cứu và phát triển như một lý thuyết toán học độc lập và có rất nhiều ứng dụng trong kinh tế, khoa học, kỹ thuật... Từ đó xuất hiện các bài toán nghiên cứu tính ổn định các hệ điều khiển.

Khái niệm ổn định hữu hạn thời gian (FTS) xuất hiện vào cuối những năm 1950 khi nó được giới thiệu trong những tài liệu của các nhà Toán học Nga. Sau đó, suốt những năm 1960, khái niệm này đã xuất hiện trong các tạp chí phương Tây. Cụ thể hơn, một hệ được gọi là FTS nếu khi ta đưa ra một giới hạn cho điều kiện ban đầu, trạng thái của hệ không vượt ra khỏi ngưỡng đã giới hạn trong suốt khoảng thời gian đã cho.

Bài toán ổn định các hệ phương trình vi phân là một trong những bài toán có nhiều ứng dụng quan trọng trong giải các bài toán xuất phát từ thực tế, đòi hỏi phải sử dụng nhiều lý thuyết và công cụ toán học hiện đại. Có nhiều phương pháp nghiên cứu tính ổn định của hệ phương trình vi phân, trong đó có phương pháp hàm Lyapunov. Trong khuôn khổ của luận văn này, luận văn đề cập đến ổn định hữu hạn thời gian hệ phương trình vi phân tuyến tính, trong đó có sử dụng phương pháp hàm Lyapunov cho bài toán ổn định Lyapunov đối với hệ phương trình vi phân, hệ phương trình vi phân có trễ.

Luận văn gồm hai chương.

Chương 1 "*Cơ sở toán học*", chương này giới thiệu các kiến thức cơ bản về hệ phương trình vi phân, hệ phương trình vi phân có trễ và điều kiện cho sự tồn tại nghiệm của nó. Từ đó giới thiệu bài toán bài toán ổn định Lyapunov cho hệ phương trình vi phân, hệ phương trình vi phân có trễ. Bài toán về ổn định hữu hạn thời gian và các bổ đề liên quan đến việc chứng minh tính ổn định hữu hạn thời gian hệ phương trình vi phân tuyến tính ở chương sau.

Chương 2 "*Ổn định hữu hạn thời gian hệ phương trình vi phân tuyến tính*", nội dung của chương này trình bày các kết quả về tính ổn định hữu hạn thời gian cho hệ phương trình vi phân tuyến tính, hệ phương trình vi phân tuyến có trễ, ứng dụng giải bài toán ổn định hữu hạn thời gian, đưa ra các ví dụ minh họa cho các bài toán ổn định.

Bản luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình của GS. TSKH. Vũ Ngọc Phát. Mặc dù bản thân đã cố gắng nhưng do thời gian có hạn, trình độ còn hạn chế nên luận văn không tránh khỏi những thiếu sót, rất mong nhận được những ý kiến đóng góp của quý thầy cô và bạn bè đồng nghiệp.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới GS.TSKH. Vũ Ngọc Phát, người thầy đã nhiệt tình hướng dẫn, truyền đạt cho tôi kiến thức trong suốt quá trình hoàn thành luận văn.

Thái Nguyên, tháng 11 năm 2015

Huệ

Phạm Thị Huệ

Chương 1

Cơ sở toán học

Chương này trình bày các kiến thức cơ bản về hệ phương trình vi phân, hệ phương trình vi phân có trễ và điều kiện cho sự tồn tại nghiệm của nó, bài toán ổn định Lyapunov cho hệ phương trình vi phân và hệ phương trình vi phân có trễ, bài toán về ổn định hữu hạn thời gian và các bổ đề liên quan đến việc chứng minh tính ổn định hữu hạn thời gian hệ phương trình vi phân tuyến tính. Nội dung chủ yếu được lấy từ tài liệu [1], [2], [3], [5].

1.1 Hệ phương trình vi phân

1.1.1 Hệ phương trình vi phân

Xét phương trình vi phân

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), & t \geq 0; \\ x(t_0) = x_0, & t_0 \geq 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

trong đó $f(t, x(t)) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ với $t \geq t_0,\ x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái.

Định nghĩa 1.1. Nghiệm $x(t)$ của phương trình vi phân (1.1) là hàm số $x(t)$ khả vi liên tục thỏa mãn

i) $(t, x(t)) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$;

ii) $x(t)$ thỏa mãn hệ phương trình vi phân (1.1).

Giả sử hàm $f(t, x(t))$ liên tục thì nghiệm của hệ phương trình vi phân (1.1) cho bởi dạng tích phân sau

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds. \tag{1.2}$$

1.1.2 Sự tồn tại nghiệm của hệ phương trình vi phân

Định nghĩa 1.2. Hàm $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, được gọi là Lipschitz đối với x đều theo t nếu tồn tại số thực dương L sao cho

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|, \quad \forall (t, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Định lý sau khẳng định sự tồn tại duy nhất nghiệm của hệ phương trình vi phân (1.1) .

Định lý 1.3. *Xét hệ phương trình vi phân* (1.1) *trong đó giả sử hàm* $f(t, x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *là liên tục theo t và thỏa mãn điều kiện Lipschitz theo x:*

$$\exists K > 0 : \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq K\|x_1 - x_2\|, \quad \forall t \geq 0.$$

Khi đó với mỗi $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ *sẽ tìm được số* $d > 0$ *sao cho hệ* (1.1) *luôn có nghiệm duy nhất trên khoảng* $[t_0 - d, t_0 + d]$.

Định lý 1.4. *Giả sử* $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *liên tục và thỏa mãn các điều kiện sau*

i) $\exists M_1, M_2 > 0 :$

$$\|f(t, x)\| \leq M_1 + M_2\|x\|, \ \forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n.$$

ii) $\exists M_3 > 0 :$

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq M_3\|x_1 - x_2\|, \ \forall (t, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Khi đó với mọi $x_0 \in \mathbb{R}^n$, tồn tại duy nhất nghiệm $x(t, x_0)$ trên khoảng $[0, \infty)$.

Nếu vế phải của hệ (1.1) không phụ thuộc t thì ta nói hệ (1.1) là ôtônôm, ngược lại ta nói hệ không ôtônôm.

Xét hệ phương trình vi phân tuyên tính ôtônôm:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + g(t), & t \geq 0; \\ x(t_0) = x_0, & t_0 \geq 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

trong đó A là ma trận hằng số cấp $n \times n$, $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ là hàm liên tục, thì hệ có nghiệm duy nhất xác định trên $[0, +\infty)$ cho bởi công thức Cauchy

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}g(s)ds.$$

Đối với hệ phương trình vi phân tuyến tính không ôtônôm có dạng

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + g(t), & t \geq 0; \\ x(t_0) = x_0, & t \geq 0, \end{cases} \tag{1.4}$$

trong đó $A(t)$ là ma trận các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}^+$, $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ là hàm liên tục. Nghiệm của hệ (1.4) thông qua ma trận nghiệm cơ bản $\Phi(t, s)$ của hệ tuyến tính thuần nhất

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), t \geq 0,$$

được cho bởi công thức

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, s)g(s)ds,$$

trong đó $\Phi(t, s)$ là ma trận nghiệm cơ bản của hệ thuần nhất thỏa mãn

$$\begin{cases} \dfrac{d\Phi}{dt}(t, s) = A(t)\Phi(t, s), & t \geq s \geq 0; \\ \Phi(t, t) = I. \end{cases}$$

1.1.3 Hệ phương trình vi phân có trễ

Chúng ta nhận thấy rằng hệ phương trình vi phân thường mô tả mối quan hệ giữa biến thời gian, trạng thái của hệ thống và vận tốc thay đổi của trạng thái tại cùng một thời điểm. Song trên thực tế, các quá trình xảy ra trong tự nhiên thường có sự liên quan tới quá khứ. Vì vậy khi mô tả quá trình này, chúng sẽ được biểu diễn bằng các phương trình vi phân có trễ.

Giả sử một hệ thống phụ thuộc vào quá khứ với độ trễ $(0 \leq h \leq +\infty)$. Với $x(.)$ là một hàm liên tục trên $\mathbb{R}^+$, nhận giá trị trong $\mathbb{R}^n$, chúng ta xây dựng hàm $x_t \in C : C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ như sau

$$x_t(s) = \{x(t+s), \forall s \in [-r, 0]\}.$$

Như vậy x_t là một đoạn quỹ đạo trên $[t-r, t]$ của hàm $x(.)$. Khi đó hệ phương trình có trễ mô tả sự phụ thuộc của vận tốc thay đổi tại thời điểm t vào trạng thái của hệ thống trong khoảng thời gian trước đó $[t-r, t]$ được cho dưới dạng tổng quát

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \quad t \geq 0, \tag{1.5}$$

trong đó $f(.) : \mathbb{R}^+ \times C \to \mathbb{R}^n$. Một nghiệm $x(.)$ của hệ (1.5) đi qua điểm $(t_0, \phi) \in \mathbb{R}^+ \times C$ được kí hiệu $x(t_0, \phi)$. Khi đó hàm giá trị ban đầu của nghiệm này trong khoảng $[t_0 - r, t_0]$ chính là hàm ϕ, tức là $x_{t_0}(t_0, \phi)(s) = x(t_0 + s) = \phi(s),\ \forall s \in [-r, 0]$.

Tương tự như phương trình vi phân thường ta cũng có công thức nghiệm dạng tích phân của hệ (1.5) là

$$x(t_0 + s) = \phi(s), \quad s \in [-r, 0],$$

$$x(t) = \phi(0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x_s) ds, \quad t \geq t_0.$$

Định lý sau đây khẳng định sự tồn tại duy nhất nghiệm toàn cục của hệ phương trình (1.5) với điều kiện ban đầu $x(t_0, \phi)$.

Định lý 1.5. *Giả sử $f(.) : \mathbb{R}^+ \times C \to \mathbb{R}^n$, là hàm liên tục theo T và thỏa mãn các điều kiện sau*