ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TRẦN THỊ HƯƠNG THƠM

NGHIỆM XẤP XỈ CỦA TOÁN TỬ ĐƠN ĐIỆU CỰC ĐẠI TRONG KHÔNG GIAN HILBERT

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TRẦN THỊ HƯƠNG THƠM

NGHIỆM XẤP XỈ CỦA TOÁN TỬ ĐƠN ĐIỆU CỰC ĐẠI TRONG KHÔNG GIAN HILBERT

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành :Toán ứng dụng

Mã số: 60 46 01 12

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
GS.TS. Nguyễn Bường

THÁI NGUYÊN - 2016

Mục lục

Bảng ký hiệu **ii**

Mở đầu **1**

1 Không gian Hilbert **3**

1.1 Không gian Hilbert 3

1.1.1 Khái niệm và ví dụ 3

1.1.2 Một số tính chất của không gian Hilbert 8

1.1.3 Phép chiếu mêtric 10

1.2 Toán tử đơn điệu và toán tử đơn điệu cực đại 11

1.3 Một số phương pháp tìm không điểm của toán tử đơn điệu . 14

1.3.1 Phương pháp điểm gần kề 16

1.3.2 Phương pháp lặp Mann 17

1.3.3 Phương pháp lặp Halpern 17

2 Xấp xỉ không điểm của toán tử đơn điệu cực đại **18**

2.1 Phương pháp xấp xỉ không điểm của toán tử đơn điệu cực đại 18

2.1.1 Mô tả phương pháp 18

2.1.2 Định lý hội tụ mạnh 19

2.1.3 Định lý hội tụ yếu 23

2.2 Áp dụng cho bài toán cực tiểu 30

Kết luận **34**

Tài liệu tham khảo **35**

Bảng ký hiệu

$\mathbb{N}$	tập số nguyên không âm
$\mathbb{N}^*$	tập số nguyên dương
$\mathbb{R}$	tập số thực
H	không gian Hilbert thực
C	tập con đóng lồi của H
$\emptyset$	tập rỗng
$\forall x$	mọi x
$\exists x$	tồn tại x
$\langle x, y\rangle$	tích vô hướng của hai vectơ x và y
$\\|x\\|$	chuẩn của vectơ x
$x_n \to x$	x_n hội tụ mạnh đến x
$x_n \rightharpoonup x$	x_n hội tụ yếu x
T	toán tử đơn điệu trong không gian Hilbert
I	toán tử đồng nhất trong H
J_r	toán tử giải của T
P_C	phép chiếu mêtric từ H lên tập lồi C của H
$\limsup_{n\to\infty} x_n$	giới hạn trên của dãy số $\{x_n\}$
$\liminf_{n\to\infty} x_n$	giới hạn dưới của dãy số $\{x_n\}$
∂f	dưới vi phân của hàm lồi f

Mở đầu

Toán tử đơn điệu là một công cụ hiệu quả và được sử dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực khác nhau của toán học như: phương trình vi phân, lý thuyết tối ưu, lý thuyết xác suất, kinh tế,... Đặc biệt trong giải tích lồi, tính lồi của một hàm nửa liên tục dưới có thể được đặc trưng bởi tính đơn điệu của dưới vi phân của nó.

Ta xét bài toán

$$\text{Tìm một phần tử } v \in H \text{ sao cho } 0 \in Tv, \tag{1}$$

trong không gian Hilbert thực H, ở đây $T : H \to 2^H$ là một toán tử đơn điệu cực đại.

Một phương pháp phổ biến để giải bài toán (1) là phương pháp điểm gần kề được đề xuất và nghiên cứu bởi Rockafellar [12] vào năm 1976. Phương pháp này được xây dựng như sau: xuất phát từ điểm $x_0 = x \in H$, dãy lặp $\{x_n\}$ trong H được xác định bởi

$$x_{n+1} = J_{r_n} x_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

trong đó $J_{r_n} = (I + r_n T)^{-1}$ và $\{r_n\}$ là một dãy số thực dương. Rockafellar [12] đã chứng minh được tính hội tụ yếu của phương pháp (2) về một nghiệm của bài toán (1).

Năm 1991, Guler [7] đã chỉ ra rằng phương pháp điểm gần kề (2) không hội tụ mạnh trong không gian Hilbert vô hạn chiều bằng một ví dụ. Năm 2004, Bauschke, Matousková và Reich [11] cũng đã chỉ ra ví dụ mà phương pháp điểm gần kề chỉ hội tụ yếu nhưng không hội tụ theo chuẩn. Do đó, vấn đề nghiên cứu, cải tiến phương pháp điểm gần kề (2) nhằm thu được sự hội tụ mạnh cũng đã được nhiều nhà toán học trên thế giới quan tâm, chẳng hạn như Kamimura và Takahashi [13], Tan và Xu [14],...

Mục đích của đề tài luận văn nhằm trình bày các nghiên cứu xây dựng phương pháp tìm không điểm của toán tử đơn điệu cực đại trong không gian Hilbert thực. Nội dung của luận văn được trình bày trong hai chương:

Chương 1: Trình bày về không gian Hilbert, một số tính chất của không gian Hilbert, toán tử đơn điệu, toán tử đơn điệu cực đại, bài toán và một số phương pháp tìm không điểm của toán tử đơn điệu cực đại làm cơ sở nghiên cứu cho Chương 2.

Chương 2: Trình bày hai phương pháp tìm xấp xỉ không điểm của toán tử đơn điệu cực đại trong không gian Hilbert thực. Phần cuối của chương là áp dụng cho bài toán tìm điểm cực tiểu của hàm lồi.

Luận văn này được thực hiện tại Trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên và hoàn thành dưới sự hướng dẫn của GS.TS. Nguyễn Bường. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất tới thầy, người đã tận tình hướng dẫn, giúp đỡ cho tác giả trong quá trình học tập, nghiên cứu và viết luận văn này.

Tác giả chân thành cảm ơn Lãnh đạo trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên, Ban chủ nhiệm khoa Toán – Tin, TS. Nguyễn Thị Thu Thủy cùng toàn thể các thầy cô trong trường đã giảng dạy và giúp đỡ cho tác giả trong suốt thời gian học tập tại trường.

Tác giả xin bày tỏ lòng cảm ơn tới trường THPT Chu Văn An – Thái Nguyên, tập thể lớp Cao học Toán K8A (khóa 2014-2016), bạn bè, đồng nghiệp và gia đình đã tạo điều kiện, động viên, giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập, nghiên cứu.

Chương 1

Không gian Hilbert

Chương này trình bày các khái niệm và tính chất của không gian Hilbert, toán tử đơn điệu, toán tử đơn điệu cực đại và một số phương pháp tìm không điểm của toán tử đơn điệu cực đại. Các kiến thức của chương này được tổng hợp từ các tài liệu [1], [2] và [3].

1.1 Không gian Hilbert

1.1.1 Khái niệm và ví dụ

Định nghĩa 1.1.1 Cho H là không gian vectơ trên $\mathbb{R}$, tích vô hướng xác định trong H là một ánh xạ

$$\begin{aligned} \langle .,. \rangle : & H \times H \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x, y) \longmapsto \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

thỏa mãn các điều kiện sau đây

1. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ với mọi $x, y \in H$;
2. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ với mọi $x, y, z \in H$;
3. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ với mọi $x, y \in H$, $\lambda \in \mathbb{R}$;
4. $\langle x, x \rangle \geq 0$ với mọi $x \in H$ và $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Số $\langle x, y \rangle$ được gọi là tích vô hướng của hai vectơ x, y trong H.

Nhận xét 1.1.2 Từ định nghĩa suy ra

1. $\langle x, 0\rangle = \langle 0, x\rangle = 0$ với mọi $x \in H$;

2. $\langle x, \lambda y\rangle = \lambda \langle x, y\rangle$ với mọi $x, y \in H$, $\lambda \in \mathbb{R}$;

3. $\langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$ với mọi $x, y, z \in H$.

Định nghĩa 1.1.3 Cặp $(H, \langle ., .\rangle)$, trong đó H là một không gian tuyến tính trên $\mathbb{R}$, $\langle ., .\rangle$ là tích vô hướng trên H được gọi là không gian tiền Hilbert thực.

Định lý 1.1.4 (Bất đẳng thức Cauchy - Schwarz) *Trong không gian tiền Hilbert H, với mọi $x, y \in H$ ta luôn có bất đẳng thức sau*

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle . \tag{1.1}$$

Chứng minh. Với $y = 0$, bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

Giả sử $y \neq 0$, khi đó với mọi số $\lambda \in \mathbb{R}$ ta đều có

$$\langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle \geq 0,$$

tức là

$$\langle x, x\rangle + \lambda\langle y, x\rangle + \lambda\langle x, y\rangle + |\lambda|^2\langle y, y\rangle \geq 0.$$

Chọn $\lambda = -\dfrac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}$ ta được

$$\langle x, x\rangle - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow |\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle.\langle y, y\rangle.$$

Định lý được chứng minh $\square$

Nhận xét 1.1.5 Dấu trong bất đẳng thức Cauchy-Schwarz xảy ra khi và chỉ khi x và y phụ thuộc tuyến tính.

Mối quan hệ giữa khái niệm chuẩn và tích vô hướng được thể hiện qua định lý sau.

Định lý 1.1.6 *Mọi không gian tiền Hilbert H đều là không gian tuyến tính định chuẩn, với chuẩn được xác định bởi công thức*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \quad \forall x \in H. \tag{1.2}$$

Chuẩn này được gọi là chuẩn cảm sinh từ tích vô hướng.

Nhận xét 1.1.7 Với kí hiệu này, bất đẳng thức Schwarz được viết lại thành

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

Như vậy một không gian tiền Hilbert được xem như không gian định chuẩn có thể đầy đủ hoặc không đầy đủ.

Định nghĩa 1.1.8 Nếu H là không gian tiền Hilbert thực và đầy đủ đối với chuẩn cảm sinh từ tích vô hướng xác định bởi (1.2) thì H được gọi là không gian Hilbert thực.

Ví dụ 1.1.9 Trong không gian $\mathbb{R}^n$ cho Không gian $\mathbb{R}^n$ với:

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n); y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

đặt $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ dễ dàng chứng minh được hàm số trên thỏa mãn các điều kiện về tích vô hướng. Ngoài ra, với $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k x_k = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2,$$

nên $\mathbb{R}^n$ là một không gian Hilbert.

Để nghiên cứu về không gian $l_2(\Lambda)$, trước hết ta cần mở rộng khái niệm tổng của một họ (tùy ý) các phần tử của không gian định chuẩn. Cho

$\Lambda \neq \emptyset$ là một tập hợp, X là một không gian định chuẩn và $f : \Lambda \to X$ là một ánh xạ. Ký hiệu $\mathcal{F}(\Lambda)$ là họ tất cả các tập con hữu hạn của Λ. Với mỗi $F \in \mathcal{F}(\Lambda)$, đặt

$$S(F) = \sum_{t \in F} f(t) \in X.$$

Giả sử tồn tại $S \in X$ thỏa mãn: với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại $F_0 \in \mathcal{F}(\Lambda)$ sao cho với mọi $F \in \mathcal{F}(\Lambda), F \supset F_0$ thì $\|S(F) - S\| < \varepsilon$. Khi đó ta nói họ $S(F)$ hội tụ về S và kí hiệu là $\lim\limits_{F \in \mathcal{F}(\Lambda)} = S$. Trong trường hợp này ta nói S là tổng của họ các phần tử $\{f(t)\}_{t \in \Lambda}$ trong không gian định chuẩn X và viết:

$$S = \sum_{t \in \Lambda} f(t).$$

Ví dụ 1.1.10 Cho Λ là một tập hợp khác rỗng tùy ý. Ký hiệu $l_2(\Lambda)$ là tập hợp các hàm số f xác định trên Λ lấy giá trị trên K sao cho

$$\sum_{t \in \Lambda} |f(t)|^2 < \infty.$$

Với $f, g \in l_2(\Lambda), \lambda \in K$, đặt

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t)$$
$$(\lambda f)(t) = \lambda f(t).$$

Dễ chứng minh được $l_2(\Lambda)$, với hai phép toán trên là một không gian tuyến tính. Ngoài ra, với $f, g \in l_2(\Lambda)$, với mỗi $t \in \lambda$, ta có $|f(t)g(t)| \leq |f(t)|^2 + |g(t)|^2$. Điều này kéo theo

$$\sum_{t \in \Lambda} |f(t)g(t)| \leq \sum_{t \in \Lambda} |f(t)|^2 + \sum_{t \in \Lambda} |g(t)|^2.$$

Do đó $\sum\limits_{t \in \Lambda} f(t)g(t)$ là tồn tại với mỗi $f, g \in l_2(\Lambda)$.