ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

HOÀNG THỊ DUNG

TẬP IĐÊAN NGUYÊN TỐ GẮN KẾT CỦA MÔĐUN ĐỐI ĐỒNG ĐIỀU ĐỊA PHƯƠNG ARTIN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

HOÀNG THỊ DUNG

TẬP IĐÊAN NGUYÊN TỐ GẮN KẾT CỦA MÔĐUN ĐỐI ĐỒNG ĐIỀU ĐỊA PHƯƠNG ARTIN

Chuyên ngành: Đại số và lý thuyết số

Mã số: 60 46 01 04

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2015

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan rằng nội dung trình bày trong luận văn này là trung thực và không trùng lặp với các đề tài khác. Tôi cũng xin cam đoan rằng mọi sự giúp đỡ cho việc thực hiện luận văn này đã được cảm ơn và các thông tin trích dẫn trong luận văn đã được chỉ rõ nguồn gốc.

Thái nguyên, ngày 21 tháng 6 năm 2015

Người viết Luận văn

Hoàng Thị Dung

Lời cảm ơn

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của Tiến sĩ NGUYỄN VĂN HOÀNG giảng viên khoa Toán Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên. Nhân dịp này tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy, người đã hướng dẫn tôi cách đọc tài liệu, nghiên cứu khoa học đúng đắn, tinh thần làm việc nghiêm túc và đã dành nhiều thời gian, công sức giúp đỡ tôi hoàn thành luận văn này.

Tôi cũng xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới các thầy cô giáo của: Viện Toán học và Đại học Thái Nguyên những người đã tận tình giảng dạy và khích lệ, động viên tôi vượt qua những khó khăn trong học tập.

Tôi xin cảm ơn Ban lãnh đạo Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Khoa Sau đại học, Sở GD - ĐT Cao Bằng, Ban Giám hiệu và Tổ Toán-Tin Trường THPT Chuyên Cao Bằng đã tạo điều kiện thuận lợi, giúp đỡ tôi trong suốt thời gian tôi học tập.

Cuối cùng, tôi xin cảm ơn bạn bè, người thân đã giúp đỡ, động viên, ủng hộ tôi để tôi có thể hoàn thành tốt luận văn cũng như khóa học của mình.

Thái nguyên, ngày 21 tháng 6 năm 2015

Người viết Luận văn

Hoàng Thị Dung

Mục lục

Mở đầu

Trong suốt luận văn này, giả thiết $(R,\mathfrak{m})$ là vành giao hoán Noerther địa phương với iđêan cực đại duy nhất là $\mathfrak{m}$. Giả thiết A là một $R-$môđun Artin và M là một $R-$môđun hữu hạn sinh có chiều $\dim M = d$. Kí hiệu $\mathrm{Ass}_R M$ là tập các iđêan nguyên tố liên kết của M. Tập tất cả các iđêan nguyên tố gắn kết của A được kí hiệu là $\mathrm{Att}_R A$ (theo I. G. Macdonald [7]).

Với mỗi iđêan I là của R, ta biết rằng tập $\mathrm{Ass}_R(M/I^nM)$ và $\mathrm{Att}_R(0:_A I^n)$ không phụ thuộc vào n khi n đủ lớn (xem bài báo của M. Brodmann [1, 12]), và vì thế các tập hợp $\bigcup_{n\geq 0}\mathrm{Ass}_R(M/I^nM)$ và $\bigcup_{n\geq 0}\mathrm{Att}_R(0:_A I^n)$ là các tập hữu hạn. Tuy nhiên điều này không còn đúng cho các tập $\mathrm{Ass}_R(M/(x_1^{n_1},\ldots,x_k^{n_k})M)$ và $\mathrm{Att}_R(0:_A (x_1^{n_1},\ldots,x_k^{n_k}))$, trong đó $(x_1,\ldots,x_k)$ là một dãy các phần tử của R với $n_1,\ldots,n_k$ là các số nguyên dương. Chẳng hạn, lấy $(R,\mathfrak{m})$ là vành Cohen-Macaulay chiều 5 (được xây dựng bởi M. Katzman [6, Corrollary 1.3]) sao cho có các phần tử $x,y\in\mathfrak{m}$ thõa mãn $\mathrm{Ass}_R(H^2_{(x,y)}(R)$ là một tập vô hạn. Khi đó tập $\bigcup_{n\geq 0}\mathrm{Ass}_R(R/(x^n,y^n)R)$ là vô hạn, và vì thế tập $\bigcup_{n\geq 0}\mathrm{Att}_R(0:_A (x^n,y^n)R)$ cũng là vô hạn, ở đây $A = E(R/\mathfrak{m})$ là bao nội xạ của $R/\mathfrak{m}$ đó là $R-$môđun Artin.

Cho $s\geq -1$ là số nguyên. Với mỗi tập con T của $\mathrm{Spec}(R)$, ta kí hiệu T_s (tương ứng, $T_{\geq s}$, $T_{>s}$) là tập gồm tất cả $\mathfrak{p}\in T$ sao cho $\dim(R/\mathfrak{p}) = s$ (tương ứng, $\dim(R/\mathfrak{p})\geq s$, $\dim(R/\mathfrak{p}) > s$). Theo Brodmann-Nhàn [2], một dãy $(x_1,\ldots,x_k)$ các phần tử của R được gọi là $M-$dãy từ chiều $>s$ nếu $x_i\notin\mathfrak{p}$ với mọi $\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}_R(M/(x_1,\ldots,x_{i-1})M)_{>s}$ với mọi $i=1,\ldots,k$. Nếu mọi hoán vị của dãy $x_1,\ldots,x_k$ cũng là $M-$dãy từ chiều $>s$ thì $(x_1,\ldots,x_k)$ được gọi là $M-$dãy từ chiều $>s$ hoán vị được. Chú ý rằng nếu $(x_1,\ldots,x_k)$ là $M-$dãy từ chiều $>s$ hoán vị được thì $\bigcup_{n_1,\ldots,n_k}(\mathrm{Ass}_R M/(x_1^{n_1},\ldots,x_k^{n_k})M)_{\geq s}$ là tập hữu hạn (xem [2, Proposition 2.6]). Từ đó một câu hỏi được L. T. Nhàn-N. V. Hoàng [9] đặt ra là tìm điều kiện của dãy $(x_1,\ldots,x_k)$ để các tập hợp $\bigcup_{n_1,\ldots,n_k}(\mathrm{Att}_R(0:_A(x_1^{n_1},\ldots,x_k^{n_k})R))_{\geq s}$, $\bigcup_{n_1,\ldots,n_k}(\mathrm{Att}_R(0:_{H^i_{\mathfrak{m}}(M)}(x_1^{n_1},\ldots,x_k^{n_k})R))_{>s}$ và $\bigcup_{n_1,\ldots,n_k}(\mathrm{Att}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M/(x_1^{n_1},\ldots,x_k^{n_k})M))_{\geq s}$ là các tập hợp hữu hạn. Năm 2014, trong một bài báo chung của Nhàn-Hoàng (xem [9]), họ đã trả lời khẳng định cho câu hỏi trên, cụ thể là các định lý sau.

Định lí 1. *Giả sử $(x_1,\ldots,x_k)$ là một $A-$ đối dãy từ chiều $>s$. Khi đó tập $(\mathrm{Att}_R(0:_A(x_1^{n_1},\ldots,x_k^{n_k})R))_{>s}$ không phụ thuộc vào cách chọn của $n_1,\ldots,n_k$ và tập $\bigcup_{n_1,\ldots,n_k}(\mathrm{Att}_R(0:_A(x_1^{n_1},\ldots,x_k^{n_k})R))_{\geq s}$ là hữu hạn.*

Định lí 2. *Giả sử R là vành catenary phổ dụng và mọi thớ hình thức của nó là Cohen-Macaulay. Lấy $(x_1,\ldots,x_k)$ là $M-$ dãy chặt từ chiều $>s$. Khi đó ta có*

(i) $(\mathrm{Att}_R H^i_{\mathfrak{m}}(M/(x_1^{n_1},\ldots,x_k^{n_k})M))_{>s}$ *và* $(\mathrm{Att}_R(0:_{H^i_{\mathfrak{m}}(M)}(x_1^{n_1},\ldots,x_k^{n_k})R))_{>s}$ *là độc lập với $n_1,\ldots,n_k$ với mọi $i\geq 0$.*

(ii) $(\mathrm{Att}_R H^i_{\mathfrak{m}}(M/(x_1,\ldots,x_k)M))_{>s}=(\mathrm{Att}_R(0:_{H^{i+k}_{\mathfrak{m}}(M)}(x_1,\ldots,x_k)R))_{>s}$ *với mọi $i\geq 0$.*

(iii) Với mỗi $i\geq 0$, tập hợp $\bigcup_{n_1,\ldots,n_k}(\mathrm{Att}_R(0:_{H^i_{\mathfrak{m}}(M)}(x_1^{n_1},\ldots,x_k^{n_k})R))_{\geq s}$ *và tập hợp* $\bigcup_{n_1,\ldots,n_k}(\mathrm{Att}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M/(x_1^{n_1},\ldots,x_k^{n_k})M))_{\geq s}$ *là hữu hạn.*

Mục đích chính của luận văn này là trình bày chi tiết lại các kết quả như đã nêu trên trong bài báo [9]: L. T. Nhan and N. V. Hoang (2014), "A finiteness result for attached primes of Artinian local cohomology modules", *Journal of Algebra and Its Applications*, Vol. 13, 1350063 (14 pages). Bên cạnh đó để việc trình bày có hệ thống và rõ ràng hơn, luận văn cũng bổ sung một số kiến thức từ các tài liệu như sách *Commutative Ring Theory* (của H. Matsumura [8]), và một số bài giảng của GS.TSKH Nguyễn Tự Cường, PGS.TS Lê Thanh Nhàn, TS. Nguyễn Văn Hoàng về đại số giao hoán và đại số đồng điều.

Luận văn được chia làm 3 chương. Chương 1 trình bày các kiến thức cơ sở cần thiết được dùng để chứng minh các kết quả ở các chương sau. Một số kiến thức được trình bày ở đây là: Vành và môđun Artin, biểu diễn thứ cấp của môđun Artin, môđun đối đồng điều địa phương, dãy chính quy và độ sâu của môđun, đối ngẫu Matlis và một số tính chất. Trong phần đầu của Chương 2, chúng tôi giới thiệu khái niệm đối dãy từ chiều $>s$

và một số tính chất. Phần sau của chương dành để trình bày chứng minh chi tiết cho Định lý 1. Chương 3 sẽ chứng minh chi tiết cho Định lý 2. Trong đó, trước mỗi phần chứng minh, chúng tôi có đưa ra một vài tính chất có liên quan khi cần thiết.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Chương này nhằm đưa ra một số kiến thức chuẩn bị giúp cho việc trình bày có hệ thống và những kiến thức đó thực cần thiết phục vụ cho chứng minh các kết quả ở những chương sau. Chương này ta luôn giả thiết R là vành giao hoán có đơn vị. Kiến thức ở chương này được trích từ một số sách [3], [7], [8].

1.1 Vành và môđun Artin

Định nghĩa 1.1.1. *(Vành và môđun Artin)* Cho R là vành giao hoán và A là $R-$ môđun. Khi đó A được gọi là môđun Artin nếu mỗi dãy giảm các môđun con của A đều dừng, nghĩa là nếu

$$A_0 \supseteq A_1 \supseteq \ldots \supseteq A_n \supseteq \ldots$$

là một dãy giảm dần các môđun con của A thì tồn tại $k \in \mathbb{N}$ sao cho $A_k = A_n$ với mọi $n \geq k$. Vành R được gọi là vành Artin nếu nó là một $R-$ môđun Artin, tức là mọi dãy giảm các iđêan của R đều dừng.

Mệnh đề sau cho ta một điều kiện tương đương với định nghĩa môđun Artin.

Mệnh đề 1.1.2. *Cho R là vành giao hoán và A là một $R-$ môđun. Khi đó các điều kiện sau là tương đương* *(i) A là môđun Artin.*

(ii) Mỗi tập khác rỗng các môđun con của A đều có phần tử cực tiểu.

Để đề cập đến một vài tính chất của môđun Artin, sau đây ta sẽ nhắc lại khái niệm độ dài của môđun.

Định nghĩa 1.1.3. Cho R là vành giao hoán khác không và M là một $R-$ môđun.

(i) Một dãy $M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_n = M$ các môđun con của M được gọi là một xích.

(ii) Xích $0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_n = M$ được gọi là một dãy hợp thành của M nếu M_{i+1}/M_i là các môđun đơn với mọi $i = 0, 1, \ldots, n-1$, tức là M_{i+1}/M_i có đúng hai môđun con là 0 và chính nó.

(iii) Độ dài của M, kí hiệu là $\ell_R(M)$, là cận trên đúng của các độ dài của các xích có dạng $0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_n = M$, trong đó $M_i \neq M_{i+1}$ với mọi $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Một $R-$ môđun M được gọi là có độ dài hữu hạn nếu M có ít nhất một dãy hợp thành. Trong trường hợp này các dãy hợp thành của M có cùng độ dài và khi đó độ dài của M chính là độ dài của một dãy hợp thành nào đó của M. Hơn thế nữa mỗi dãy tăng hoặc giảm thực sự các môđun con của M đều có độ dài không vượt quá độ dài của dãy hợp thành.

Định lý 1.1.4. *Ta có các phát biểu sau là đúng.*

(i) Nếu R là vành Artin thì mọi iđêan nguyên tố của R đều tối đại.

(ii) Nếu R là vành Artin thì R có hữu hạn iđêan tối đại.

Định nghĩa 1.1.5. *(Chiều Krull)* Cho R là một vành giao hoán, một dãy giảm thực sự các iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}_0 \supset \mathfrak{p}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{p}_n$ của vành R được gọi là một xích nguyên tố có độ