ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC**

**ĐÀO QUANG DUY**

# NGHIÊN CỨU CÁC PHÉP BIẾN HÌNH THEO QUAN ĐIỂM NHÓM

**LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC**

**THÁI NGUYÊN, THÁNG 6 NĂM 2016**

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC**

**ĐÀO QUANG DUY**

# NGHIÊN CỨU CÁC PHÉP BIẾN HÌNH THEO QUAN ĐIỂM NHÓM

**Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp**
**Mã số: 60 46 01 13**

**LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC**

**Người hướng dẫn khoa học: TS. Nguyễn Danh Nam**

**THÁI NGUYÊN, THÁNG 6 NĂM 2016**

# MỤC LỤC

# MỞ ĐẦU

Nhà toán học Ơclít, trong tác phẩm “Cơ bản” của mình đã đặt nền móng đầu tiên cho sự ra đời của việc xây dựng hình học theo phương pháp tiên đề vào khoảng năm 300 trước công nguyên. Trong tác phẩm nổi tiếng của mình, ông đã nêu ra tư tưởng sử dụng phép biến hình trong việc định nghĩa hai hình bằng nhau, đó là: “Hai hình được gọi là bằng nhau nếu chúng chồng khít lên nhau”.

Đến thế kỉ XVIII, khái niệm các phép biến hình xuất hiện như một công cụ để chuyển các tính chất hình học (bất biến) từ hình này sang hình kia và được sử dụng để giải một số bài toán. Nó chưa được xem là đối tượng để nghiên cứu cho đến cuối thế kỉ XVIII. Nhà toán học Bellavitis (1803 - 1880) đã nghiên cứu một cách hệ thống về phép biến hình trong lý thuyết về các hình của ông. Với sự ra đời của phương pháp tọa độ Đề-các thì hình được coi là một tập hợp các điểm. Quan niệm này đã đóng vai trò quan trọng trong lịch sử hình thành và phát triển của lý thuyết về các phép biến hình.

Đến cuối thế kỉ XIX, nhà toán học người Đức, Felix Klein (1849 - 1925) đã nghiên cứu hình học theo quan điểm nhóm các phép biến hình. Ông đã phân loại tính chất hình học theo các phép biến hình bảo toàn những tính chất đó. Từ đó, ông phân loại các hình học khác nhau dựa trên việc nghiên cứu bất biến của các nhóm biến hình khác nhau. Ví dụ tập hợp các phép dời hình lập thành một nhóm với phép toán tích các phép dời hình và hình học của nhóm dời hình chính là hình học Ơclít. Như vậy mỗi nhóm biến hình có hình học riêng của nhóm đó. Ngoài hình học Ơclít, chương trình hình học ở bậc đại học hiện nay còn có các thứ hình học khác như hình học đồng dạng, hình học afin, hình học xạ ảnh. Các bài toán không đề cập đến độ lớn của hình, độ dài của các đoạn thẳng và chỉ quan tâm tới sự thẳng hàng của ba điểm, sự cắt nhau và vuông góc với nhau của hai đường thẳng... thì đó chính là các bài toán của hình học đồng dạng vì ta chỉ nghiên cứu các bất biến của phép đồng dạng mà thôi. Ngoài hình học đồng dạng, thì hình học afin, hình học xạ ảnh cũng là những bộ phận của hình học Ơclít. Để hiểu rõ mối quan hệ giữa hình học Ơclít với các hình học khác, chúng ta cần hiểu rõ mối quan hệ giữa hình học của một nhóm với hình học của nhóm con của nhóm đó.

Dựa trên các bất biến của mỗi nhóm, Felix Klein đã sắp xếp lại các loại hình học khác nhau theo quan điểm hiện đại. Các nhóm biến hình được sắp xếp cụ thể như sau: *Nhóm xạ ảnh* $\supset$ *Nhóm afin* $\supset$ *Nhóm đồng dạng* $\supset$ *Nhóm dời hình*. Hình học của mỗi nhóm biến hình là môn học nghiên cứu các bất biến của nhóm đó và vấn đề vận dụng bất biến của từng nhóm trong giải các bài toán hình học. Như vậy, ứng với mỗi nhóm biến hình trên, ta hệ thống hóa được các hình học khác nhau theo quan hệ bao hàm như sau: *Hình học xạ ảnh* $\subset$ *Hình học afin* $\subset$ *Hình học đồng dạng* $\subset$ *Hình học Ơclít*. Phép biến hình cùng với khái niệm hàm số là các ánh xạ được đưa vào chương trình sách giáo khoa môn Toán ở trường phổ thông. Ngoài mục tiêu phát triển tư duy hàm cho học sinh phổ thông, phép biến hình còn được dùng để định nghĩa thế nào là hai hình bằng nhau hoặc đồng dạng với nhau và là một công cụ hiệu quả để giải các bài toán hình học ở trường phổ thông.

# Chương 1

# NHÓM CÁC PHÉP BIẾN HÌNH

## 1.1. KHÁI NIỆM PHÉP BIẾN HÌNH

### *1.1.1. Định nghĩa*

Trong mặt phẳng hoặc không gian cho một quy tắc *f*. Với mỗi điểm *M* thuộc mặt phẳng hoặc không gian ta xác định được duy nhất một điểm *M'* thuộc mặt phẳng hoặc không gian theo quy tắc đã cho hay nói cách khác *f là một ánh xạ trong mặt phẳng hoặc không gian*. Khi đó ta nói *M'* là ảnh của *M* qua phép biến hình *f*, *M* được gọi là tạo ảnh của *M'* và được kí hiệu $f\colon M \to M'$.

Nếu quy tắc *f* được xác định cho mọi điểm của mặt phẳng hoặc không gian thì *f* được gọi là một phép biến hình trong trong mặt phẳng hoặc không gian. Như vậy ta thấy mỗi ảnh của một điểm *M* trong phép biến hình có thể có nhiều tạo ảnh. Do đó, *ánh xạ f không nhất thiết là một song ánh*. Nếu mỗi ảnh của một điểm *M* bất kì trong mặt phẳng ứng với một tạo ảnh duy nhất là *M*, tức là ánh xạ *f* là song ánh thì ta nói *f* là một phép biến hình 1-1. Ví dụ về các phép biến hình 1-1: phép đối xứng tâm, phép đối xứng trục, phép tịnh tiến, phép quay, phép nghịch đảo.

Điểm *M* trong mặt phẳng hoặc không gian được gọi là điểm bất động (hay điểm kép) của một phép biến hình *f* nếu $f(O) = O$. Nếu mọi điểm của mặt phẳng hoặc không gian đều là điểm bất động của *f* thì *f* được gọi là phép đồng nhất, kí hiệu là $e(M) = M$, với mọi điểm *M*.

Trong mặt phẳng hoặc không gian cho một phép biến hình *f* và một hình *H*. Tập hợp ảnh của mọi điểm thuộc hình *H* qua phép biến hình đó tạo thành một hình *H'* được gọi là ảnh của hình *H* và được kí hiệu là $f\colon H \to H'$ hoặc được viết dưới ngôn ngữ tập hợp là $H' = \{M' \mid M' = f(M), \forall M \in H\}$. Nếu $f(H) = H$ thì hình *H* được gọi là bất động (hay bất biến) qua phép biến hình *f*. Đặc biệt, nếu *H* là bất biến đối với phép biến hình *f* mà mọi điểm của *H* đều bất động thì hình *H* được gọi là hình cố định hay hình bất động hoàn toàn. Chẳng hạn, trong phép đối xứng tâm $Đ_O$ tâm đối xứng *O* là điểm bất động duy nhất và mọi đường thẳng đi qua điểm *O* đều bất động. Trong phép đối xứng trục $Đ_d$ thì trục đối xứng $d$ là hình bất động hoàn toàn và mọi đường thẳng (hoặc mặt phẳng) vuông góc với $d$ đều là bất biến.

Trong chương trình sách giáo khoa phổ thông, ở bậc THCS, "phép biến hình" chỉ xuất hiện ngầm ẩn. Lúc này, các từ "phép", "biến thành… ", "ảnh" không được sử dụng, vì học sinh chưa được học khái niệm ánh xạ. Cụ thể, sách giáo khoa đề cập đến đối xứng trục, đối xứng tâm mà không nói đến phép đối xứng trục, phép đối xứng tâm. Tuy nhiên, ở bậc THPT, phép biến hình được hiểu là một ánh xạ từ mặt phẳng, hay tổng quát hơn, từ không gian, lên chính nó, ở đó mặt phẳng và không gian được nghiên cứu với tư cách là các tập hợp điểm và "đặc trưng hàm" xuất hiện.

### *1.1.2. Tích các phép biến hình*

Trong mặt phẳng hoặc không gian cho hai phép biến hình $f$ và $g$. Với mỗi điểm $M$, $f:M \to M'$ và $g: M' \to M''$. Phép biến hình biến $M \to M''$ được gọi là tích của hai phép biến hình đã cho và được kí hiệu $g.f: M \to M''$. Nếu $g.f$ là một phép đồng nhất thì ta nói $g$ là phép biến hình đảo ngược của $f$. Nếu $f \circ f = f^2 = e$ thì ta nói phép biến hình có tính chất đối hợp. Các phép biến hình có tính chất đối hợp như phép đối xứng tâm, phép đối xứng trục, phép đối xứng qua mặt phẳng và phép nghịch đảo.

Cho $n$ phép biến hình $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}, f_n$. Tích của $n$ phép biến hình đã cho là một phép biến hình được thực hiện một cách liên tiếp theo một thứ tự xác định và được kí hiệu là $f = f_n \circ f_{n-1} \circ\circ\circ f_2 \circ f_1$.

Tích các phép biến hình có những tính chất sau đây:

1) Tính chất *kết hợp*, nghĩa là $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h = f \circ g \circ h$. Điều này có được do tích các ánh xạ có tính chất kết hợp. Như vậy, bao giờ cũng có thể thay hai hoặc nhiều phép biến hình liên tiếp bởi tích của chúng, hoặc ngược lại, có thể thay một phép biến hình nào đó bởi một tích tương đương.

2) *Nói chung*, tích các phép biến hình *không có tính chất giao hoán*. Tích hai phép biến hình $f$ và $g$ được gọi là giao hoán nếu $f \circ g = g \circ f$.

3) Trong tập hợp các phép biến hình trong mặt phẳng hoặc không gian, phép đồng nhất *e* là phần tử đơn vị của phép toán tích: $e \circ f = f \circ e = f, \forall f$.

4) Nếu phép biến hình *f* là song ánh, tồn tại phép biến hình đảo ngược của *f*. Khi đó, tích của hai phép biến hình đảo ngược nhau là phép đồng nhất *e*:

$$f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = e, \forall f$$

***Định lý 1.1.*** Tập hợp các phép biến hình 1-1 trong mặt phẳng hoặc không gian với phép toán tích các phép biến hình lập thành một nhóm gọi là nhóm các phép biến hình 1-1 hay *nhóm biến hình 1-1*.

***Chứng minh.*** Dễ thấy tích của hai phép biến hình 1-1 là một phép biến hình 1-1 (vì tích của hai song ánh là một song ánh). Do vậy, phép toán tích hai phép biến hình đóng kín.

1) Tích các phép biến hình có tính chất kết hợp (do tính chất kết hợp của phép toán tích các song ánh).

2) Phần tử đơn vị của nhóm là phép đồng nhất *e* (vì phép đồng nhất là một song ánh).

3) Với mỗi phép biến hình *f* đều tồn tại phép biến hình đảo ngược $f^{-1}$ (do *f* là song ánh) thỏa mãn đẳng thức: $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = e$ (*e* là phép đồng nhất).

Vậy, tập hợp các phép biến hình 1-1 trong mặt phẳng hoặc không gian cùng với phép toán tích lập thành một nhóm.

Một tính chất của hình *H* được gọi là *bất biến đối với nhóm G* nếu nó không thay đổi khi ta dùng một phép biến đổi *f* thuộc *G* để biến hình *H* thành một hình khác. Như vậy, ta có thể nói rằng, một tính chất của hình *H* sẽ gọi là bất biến đối với nhóm *G* nếu mọi hình *H'* tương đương với *H* đối với nhóm *G* đều có tính chất đó. Hình học nghiên cứu các bất biến của một nhóm được gọi là hình học của nhóm đó. Ví dụ, hình học nghiên cứu bất biến của nhóm xạ ảnh gọi là hình học xạ ảnh, hình học nghiên cứu bất biến của nhóm afin gọi là hình học afin, hình học nghiên cứu bất biến của nhóm dời hình gọi là hình học Oclít,…

Nếu ta xét một nhóm con *G'* của nhóm *G* thì giữa hình học của các nhóm con *G'* và hình học của nhóm *G* có mối quan hệ sau đây:

(i) Mọi bất biến của nhóm *G* cũng là bất biến của nhóm *G'* (vì $G' \subset G$). Do đó những kết quả tìm thấy trong hình học của nhóm *G* đều áp dụng được vào cho hình học của nhóm *G'*.

(ii) Có những bất biến của nhóm *G'* mà không phải bất biến của nhóm *G*, nghĩa là hình học của nhóm *G'* phong phú hơn hình học của nhóm *G*.

Như vậy, nhóm càng rộng thì tính chất hình học của nhóm càng ít, nhưng phạm vi áp dụng của nó càng rộng; nhóm càng hẹp thì các tính chất hình học của nhóm càng phong phú, nhưng phạm vi áp dụng của nó càng hẹp. Trong khuôn khổ luận văn này, chúng tôi chỉ đi nghiên cứu những nhóm con của nhóm biến hình 1-1 trong không gian 2 chiều và không gian 3 chiều.

## 1.2. NHÓM AFIN

### *1.2.1. Phép biến hình afin*

Trong mặt phẳng hoặc không gian, phép biến hình 1-1 biến mặt phẳng hoặc không gian thành chính nó, biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng được gọi là phép afin hay *phép biến hình afin*.

Một phép biến hình afin trên mặt phẳng hoàn toàn được xác định nếu ta biết ba điểm không thẳng hàng, hơn nữa nếu *A, B, C* và *A', B', C'* là hai tam giác trên mặt phẳng thì tồn tại duy nhất phép biến hình afin biến tam giác *ABC* thành tam giác *A'B'C'*. Tương tự như vậy, một phép biến hình afin trong không gian hoàn toàn được xác định nếu ta biết bốn điểm không đồng phẳng, hơn nữa nếu *A, B, C, D* và *A', B', C', D'* là hai tứ diện trong không gian thì tồn tại duy nhất phép biến hình afin biến tứ diện *ABCD* thành tứ diện *A'B'C'D'*.

Từ đó ta có kết quả, trong mặt phẳng, phép biến hình afin là phép đồng nhất khi và chỉ khi nó có ba điểm bất động không thẳng hàng. Nếu phép biến hình afin *f* có hai điểm bất động phân biệt *A, B* thì mọi điểm nằm trên đường thẳng *AB* đều là điểm bất động. Tương tự, trong không gian, phép biến hình afin là phép đồng nhất khi và chỉ khi nó có bốn điểm bất động không đồng phẳng. Nếu phép biến hình afin *f* có ba điểm bất động phân biệt *A, B, C* thì mọi điểm nằm trên mặt phẳng (*ABC*) đều là điểm bất động.