ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

LÊ THỊ TUYẾT NHUNG

TÍNH GIẢI ĐƯỢC CỦA MỘT HỆ PHƯƠNG TRÌNH CẶP TÍCH PHÂN FOURIER

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

LÊ THỊ TUYẾT NHUNG

TÍNH GIẢI ĐƯỢC CỦA MỘT HỆ PHƯƠNG TRÌNH CẶP TÍCH PHÂN FOURIER

Chuyên ngành: TOÁN GIẢI TÍCH
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
TS. NGUYỄN THỊ NGÂN

Thái Nguyên - 2016

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan rằng nội dung trình bày trong luận văn này là trung thực và không trùng lặp với đề tài khác. Tôi cũng xin cam đoan rằng mọi sự giúp đỡ cho việc thực hiện luận văn này đã được cảm ơn và các thông tin trích dẫn trong luận văn đã được chỉ rõ nguồn gốc.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2016

Người viết luận văn

Lê Thị Tuyết Nhung

Lời cảm ơn

Để hoàn thành được luận văn một cách hoàn chỉnh, tôi luôn nhận được sự hướng dẫn và giúp đỡ nhiệt tình của TS. Nguyễn Thị Ngân. Tôi xin chân thành bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến cô giáo và xin gửi lời tri ân nhất của tôi đối với những điều cô giáo đã dành cho tôi.

Tôi xin chân thành cảm ơn Ban Giám hiệu Trường Đại học Sư phạm- Đại học Thái Nguyên cùng các Phòng- Ban chức năng của Trường Đại học Sư phạm- Đại học Thái Nguyên, các Quý Thầy Cô giảng dạy lớp Cao học K22 (2014- 2016) Trường Đại học Sư phạm- Đại học Thái Nguyên đã tận tình truyền đạt những kiến thức quý báu cũng như tạo điều kiện cho tôi hoàn thành khóa học.

Tôi xin cảm ơn gia đình, bạn bè, những người thân đã luôn động viên, hỗ trợ và tạo mọi điều kiện cho tôi trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn. Xin trân trọng cảm ơn !

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2016

Người viết luận văn

Lê Thị Tuyết Nhung

Mục lục

Mở đầu

Phương trình cặp và hệ phương trình cặp xuất hiện khi giải bài toán hỗn hợp của vật lý toán. Nhiều bài toán tiếp xúc của lý thuyết đàn hồi, các bài toán về vết nứt, về dị tật trong môi trường,... có thể đưa đến việc giải các phương trình cặp khác nhau.

Trong bài toán biên hỗn hợp của phương trình điều hòa với điều kiện biên hỗn hợp được cho như sau: Trên cạnh $y = 0$ điều kiện biên Dirichlet được cho trên khoảng hữu hạn (a, b), còn ngoài khoảng đó cho điều kiện Neumann. Trên cạnh $y = h$ điều kiện biên Neumann được cho trên khoảng hữu hạn (a, b), còn ngoài khoảng đó cho điều kiện biên Dirichlet. Bài toán được giải bằng cách đưa về hệ phương trình cặp tích phân Fourier mà các phần tử trên đường chéo chính của ma trận biểu trưng cấp hai, một tăng-một giảm cấp một.

Với mong muốn được tìm hiểu tính giải được của hệ phương trình cặp tích phân xuất hiện khi giải bài toán biên hỗn hợp của phương trình điều hòa trên miền hình dải, tôi chọn đề tài "Tính giải được của một hệ phương trình cặp tích phân Fourier". Luận văn ngoài phần Mở đầu, Kết luận, Tài liệu tham khảo gồm có hai chương nội dung.

Chương 1 trình bày tổng quan một số kiến thức cơ bản về phương trình tích phân, phương trình tích phân kì dị, hệ vô hạn các phương trình đại số tuyến tính, các đa thức Chebyushev, biến đổi Fourier của các hàm cơ bản giảm nhanh, biến đổi Fourier của các hàm suy rộng tăng chậm, các không gian Sobolev, các không gian Sobolev vectơ, phiếm hàm tuyến tính liên tục, toán tử giả vi phân vectơ.

Chương 2 trình bày về tính giải được của hệ phương trình cặp tích phân Fourier xuất hiện khi giải bài toán biên hỗn hợp của phương trình điều hòa. Các Định lí 2.1, Định lí 2.2 đã chứng minh được sự tồn tại và duy nhất nghiệm của các hệ phương trình cặp tích phân Fourier trong các không gian Sobolev vectơ thích hợp, đưa các hệ phương trình cặp tích phân Fourier về hệ các phương trình tích phân kỳ dị với nhân Cauchy, đưa tiếp các hệ phương trình tích phân về hệ vô hạn các phương trình đại số tuyến tính. Đánh giá được các hệ số của các hệ vô hạn các phương trình đại số tuyến tính đó và chứng minh các hệ phương trình đó có duy nhất nghiệm thuộc không gian ℓ_2, các hệ vô hạn các phương trình đại số tuyến tính đó là hệ tựa hoàn toàn chính quy.

Luận văn được hoàn thành tại Trường Đại học Sư phạm- Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn khoa học của TS. Nguyễn Thị Ngân. Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc nhất tới cô giáo hướng dẫn, Trường Đại học Sư phạm- Đại học Thái Nguyên đã tạo mọi điều kiện thuận lợi để em hoàn thành được khóa học của mình.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

1.1 Phương trình tích phân

Định nghĩa 1.1. Phương trình tích phân là phương trình mà ẩn hàm chưa biết nằm trong dấu tích phân.

Ví dụ 1.1. Với $a \leq s, t \leq b$ ta có các phương trình tích phân:

$$f(t) = \lambda \int\limits_a^b K(t,s)g(s)ds, \tag{1.1}$$

$$g(t) = \lambda \int\limits_a^b K(t,s)g(s)ds, \tag{1.2}$$

$$g(t) = \lambda \int\limits_a^b (K(t,s))^2 ds, \tag{1.3}$$

$$g(t) = f(t) + \lambda \int\limits_a^b K(t,s)g(s)ds. \tag{1.4}$$

Thấy rằng:
+ Hàm ẩn $g(t)$ phải tìm có thể chỉ nằm trong dấu tích phân có thể nằm ngoài dấu tích phân.
+Một phương trình tích phân được gọi là tuyến tính nếu hàm phải tìm là bậc 1 (ví dụ các phương trình (1.1) và (1.2) là tuyến tính còn (1.3) là không phải).
+Bằng biến đổi thích hợp, một phương trình tích phân bao giờ cũng đưa

được về dạng $(A - \lambda I)g = f$, trong đó A là toán tử tích phân, khi đó nếu A là toán tử tuyến tính thì phương trình tích phân đó là tuyến tính.

Định nghĩa 1.2. Phương trình có dạng:

$$g(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t,s)g(s)ds,$$

được gọi là phương trình Fredhom loại 2, trong đó $g(t)$ là hàm chưa biết, $f(t)$ và $K(t,s)$ là những hàm cho trước, λ là hàm số.

Phương trình có dạng:

$$f(t) = \lambda \int_a^b K(t,s)g(t)ds,$$

được gọi là phương trình Fredhom loại 1, trong đó $g(t)$ là hàm chưa biết, $f(t)$ và $K(t,s)$ là những hàm cho trước, λ là hàm số.

1.2 Phương trình tích phân kỳ dị loại một

Xét phương trình tích phân kỳ dị sau

$$\frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{\varphi(\tau)}{\tau - \xi} d\tau = f(\xi), \;\; a < \xi < b. \tag{1.5}$$

Phương trình (1.5) là một trường hợp riêng quan trọng của các phương trình tích phân kỳ dị thường gặp trong nhiều bài toán cơ học và Vật lý toán. Trong phương trình trên ta giả thiết rằng hàm $f(\xi)$ thỏa mãn điều kiện Holder. Tùy thuộc vào dáng điệu của ẩn hàm ở các đầu mút của đoạn $[a,b]$, ta có các công thức nghiệm sau đây của phương trình:

a. Nghiệm không bị chặn ở hai đầu mút:

$$\varphi(\xi) = -\frac{1}{\sqrt{(\xi - a)(b - \xi)}}\left[\frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{\sqrt{(\tau - a)(b - \tau)}f(\tau)}{\tau - \xi} d\tau + a_0\right], \quad a < \xi < b, \tag{1.6}$$

trong đó a_0 là hằng số tùy ý.