ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

MALAYTHONG CHOUMPHAYLOUANG

SỰ HỘI TỤ YẾU* CỦA ĐỘ ĐO MONGE-AMPERE PHỨC KẾT HỢP VỚI LỚP CÁC HÀM DELTA-ĐA ĐIỀU HOÀ DƯỚI

Chuyên ngành: Toán giải tích
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC: PGS.TS PHẠM HIẾN BẰNG

THÁI NGUYÊN - 2016

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các tài liệu trong luận văn là trung thực. Luận văn chưa từng được công bố trong bất cứ công trình nào.

Tác giả

Malaythong Choumphaylouang

LỜI CẢM ƠN

Bản luận văn được hoàn thành tại Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Việt Nam dưới sự hướng dẫn tận tình của PGS.TS Phạm Hiến Bằng. Nhân dịp này tôi xin cám ơn Thầy về sự hướng dẫn hiệu quả cùng những kinh nghiệm trong quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Xin chân thành cảm ơn Phòng Sau Đại học, Ban chủ nhiệm Khoa Toán, các thầy cô giáo Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học và Trường Đại học Sư phạm Hà Nội đã giảng dạy và tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu khoa học.

Xin chân thành cảm ơn Trường Cao đẳng sư phạm Pakse-CHDCND Lào cùng các đồng nghiệp đã tạo điều kiện giúp đỡ tôi về mọi mặt trong quá trình học tập và hoàn thành bản luận văn này.

Bản luận văn chắc chắn sẽ không tránh khỏi những khiếm khuyết vì vậy rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô giáo và các bạn học viên để luận văn này được hoàn chỉnh hơn.

Cuối cùng xin cảm ơn gia đình và bạn bè đã động viên, khích lệ tôi trong thời gian học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Tháng 04 năm 2016

Tác giả

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Sự hội tụ yếu* của dãy các độ đo Monge-Ampère phức của hàm đa điều hòa dưới hội tụ theo dung lượng đã được nghiên cứu bởi nhiều tác giả. Năm 1996, Y.Xing đã thiết lập sự hội tụ yếu* của các độ đo Monge-Ampère phức các hàm đa điều hòa dưới bị chặn địa phương hội tụ theo C_{n-1} - dung lượng hoặc C_n - dung lượng ([14]). Sau đó, năm 2000, Xing [15] mở rộng kết quả trên đối với các hàm đa điều hòa dưới với giá trị bị chặn ở gần biên. Gần đây Cegrell đã tổng quát hoá các kết quả trên cho một vài lớp các hàm đa điều hòa dưới mà trên đó độ đo Monge-Ampère phức được xác định. Trong [6] Cegrell đã chứng minh rằng nếu $u_j, u \in \mathcal{E}(\Omega)$, u_j, u bị chặn dưới đều bởi hàm thuộc lớp $\mathcal{F}(\Omega)$ và nếu $u_j \to u$ theo dung lượng, thì $(dd^c u_j)^n$ hội tụ yếu* đến $(dd^c u)^n$. Năm 2010, L.M. Hải, N.V. Khiêm và T.V. Long [13] đã chứng minh kết quả trên của Cegrell bằng cách thay thế lớp $\mathcal{E}$ bởi lớp $\delta\mathcal{E}_{loc}(\Omega)$. Đồng thời nghiên cứu sự hội tụ yếu* của dòng gồm các dạng $(dd^c u_j)^p \wedge T$, trong đó T là dòng dương đóng song chiều (p,p) và u_j là hàm delta-đa điều hòa dưới hội tụ theo C_T - dung lượng. Trong luận văn này chúng tôi sẽ trình bày lại các kết quả trên của L.M. Hải, N.V. Khiêm và T.V. Long. Do đó chúng tôi chọn đề tài: "*Sự hội tụ yếu* của độ đo Monge-Ampere phức kết hợp với lớp các hàm delta-đa điều hoà dưới*".

2. Mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu

2.1. Mục đích nghiên cứu

Mục đích chính của luận văn là nghiên cứu về sự hội tụ yếu* của độ đo Monge - Ampere phức các hàm delta-đa điều hòa dưới tụ theo C_n - dung lượng và C_T - dung lượng đối với dòng dương đóng T.

2.2. Nhiệm vụ nghiên cứu

Luận văn tập trung vào các nhiệm vụ chính sau đây:

+ Trình bày tổng quan và hệ thống các kết quả về Dạng vi phân và dòng trong lý thuyết đa thế vị, các tính chất của hàm điều hoà dưới, hàm đa điều hoà dưới, hàm cực trị tương đối, toán tử Monge-Ampère, các lớp năng lượng Cegrell.

+ Nghiên cứu về sự hội tụ yếu* của độ đo Monge-Ampere phức kết hợp với lớp các hàm delta-đa điều hoà dưới, ở đó đã thay thế lớp $\mathcal{E}$ trong Cegrell [6] bởi lớp $d\mathcal{E}_{loc}(\Omega)$.

3. Phương pháp nghiên cứu

Sử dụng các phương pháp của lý thuyết đa thế vị.

4. Bố cục của luận văn

Nội dung luận văn gồm 43 trang, trong đó có phần mở đầu, hai chương nội dung, phần kết luận và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1: Trình bày tổng quan và hệ thống các kết quả về các tính chất của hàm đa điều hoà dưới, hàm cực trị tương đối, toán tử Monge-Ampère, các lớp năng lượng Cegrell.

Chương 2: Là nội dung chính của luận văn, trình bày các kết quả nghiên cứu gần đây Các kết quả nghiên cứu về sự hội tụ yếu* của độ đo Monge-Ampere phức kết hợp với lớp các hàm delta-đa điều hoà dưới.

Cuối cùng là phần kết luận trình bày tóm tắt kết quả đạt được.

Chương 1
CÁC KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1. Dạng vi phân và dòng trong lý thuyết đa thế vị

Giả sử $\mathbb{R}^n$ là không gian vector n chiều với cơ sở chính tắc $e_j = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$, ở đó 1 ở vị trí thứ j. Giả sử với mỗi $1 \le j \le n$ kí hiệu u_j là hàm tọa độ thứ j : $u_j(x) = x_j$. Một ánh xạ $f : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}_{p} \to \mathbb{C}$ gọi là $p-$ tuyến tính nếu nó là tuyến tính theo từng biến khi các biến khác cố định. Một ánh xạ $p-$ tuyến tính sao cho $f(v_1,\ldots,v_p) = 0$ khi $v_j = v_{j+1}, 1 \le j < n$ gọi là ánh xạ $p-$ tuyến tính thay dấu. Tập các ánh xạ $p-$ tuyến tính thay dấu từ $\underbrace{\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}_{p}$ tới $\mathbb{C}$ kí hiệu $\bigwedge^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

Định nghĩa 1.1.1. *Giả sử* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *là tập mở. Một* $p-$ *dạng vi phân trên* Ω *là ánh xạ* $\alpha : U \to \bigwedge^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

Nếu đặt $dx_k(x) = u_k, 1 \le k \le n, x \in \Omega$ thì ta có thể viết mỗi $p-$ dạng vi phân α trên Ω dưới dạng:

$$\alpha(x) = \sum_I{}' \alpha_I(x) dx_I$$

ở đó $I = (i_1,\ldots,i_p), 1 \le i_1 < \ldots < i_p \le n, dx_I = dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}, \alpha_I(x)$ là các hàm trên Ω.

Giả sử $\alpha = \sum_I{}' \alpha_I dx_I$ là $p-$ dạng và $\beta = \sum_J{}' \beta_J(x) dx_J$ là $q-$ dạng, ở đó $1 \le i_1 < \ldots < i_p \le n$ và $1 \le j_1 < \ldots < j_q \le n$ khi đó tích ngoài $\alpha \wedge \beta$ là $(p+q)-$ dạng cho bởi công thức $\alpha \wedge \beta = \sum_L \gamma_L dx_L$, ở đó $\gamma_L dx_L = 0$ nếu $i_k = j_l$ với $1 \le k \le p, 1 \le l \le q$ và $\gamma_L dx_L = (-1)^\sigma \alpha_I \beta_J dx_{l_1} \wedge \ldots \wedge dx_{l_{p+q}}$,

$1 \le l_1 < \ldots < l_{p+q} \le n$ với σ là hoán vị của dãy $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$ và $j_1 < j_2 < \ldots < j_q$ trong tập hợp $\{1,\ldots,n\}$ để tạo thành dãy tăng $1 \le l_1 < \ldots < l_{p+q} \le n$.

Nếu f là một hàm thì $f \wedge \alpha = f\alpha$ và $(f\alpha) \wedge \beta = f(\alpha \wedge \beta)$.

Mọi $p-$ dạng α với $p > n$ đều bằng 0. Các dạng có bậc cực đại là các dạng bậc n. Cho α là $p-$ dạng lớp C^1. Vi phân ngoài (đạo hàm ngoài) của α là $(p+1)-$ dạng cho bởi:

$$d\alpha = \sum_I{}' d\alpha_I \wedge dx_I$$

Nếu $d\alpha = 0$ ta nói α là dạng đóng. Mọi dạng có bậc cực đại là đóng.

Giả sử $\alpha = \varphi\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n, \varphi \in L^1(\Omega)$. Khi đó

$$\int_\Omega \alpha = \int_\Omega \varphi\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = \int_\Omega \varphi\, dV ,$$

dV là độ đo Lebesgue trên Ω.

Định nghĩa 1.1.2. *Một dòng bậc p hay có chiều $(n-p)$ trên tập mở $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là dạng tuyến tính liên tục $T : \mathcal{D}^{(n-p)}(\Omega) \to \mathbb{C}$. Nếu α là dạng trong $\mathcal{D}^{(n-p)}(\Omega)$, giá trị của T tại α, kí hiệu bởi $T(\alpha)$ hay $\langle T, \alpha \rangle$.*

Bây giờ giả sử $p,q = 0,1,\ldots,n$. Ta kí hiệu $\mathbb{C}_{(p,q)}$ là tập các dạng phức song bậc (p,q) hệ số hằng trên $\mathbb{C}^n$. Khi đó nếu $\omega \in \mathbb{C}_{(p,q)}$ thì ω có thể biểu diễn:

$$\omega = \sum_{|J|=p,|K|=q}{}' \omega_{JK} dz_J \wedge d\bar{z}_K$$

ở đó $\omega_{JK} \in \mathbb{C}, dz_J = dz_{j_1} \wedge \ldots \wedge dz_{j_p}, d\bar{z}_K = d\bar{z}_{k_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{k_q}$ tổng lấy theo các bộ đa chỉ số $J = (j_1,\ldots,j_p), K = (k_1,\ldots,k_q)$ với $1 \le j_1 < \ldots < j_p \le n$, $1 \le k_1 < \ldots < k_q \le n$.

Dạng Kähler chính tắc trên $\mathbb{C}^n$ cho bởi:

$$\beta = \frac{i}{2}\partial\bar{\partial}|z|^2 = \frac{i}{2}\sum_{j=1}^{n} dz_j \wedge d\bar{z}_j$$

Khi đó dạng thể tích trên $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ cho bởi:

$$dV = \frac{1}{n!}\beta^n = \frac{1}{n!}\underbrace{\beta\wedge\ldots\wedge\beta}_{n} = \frac{i}{2}dz_1\wedge d\bar{z}_1\wedge\frac{i}{2}dz_2\wedge d\bar{z}_2\wedge\ldots\wedge\frac{i}{2}dz_n\wedge d\bar{z}_n$$

$$= \left(\frac{i}{2}\right)^n dz_1\wedge d\bar{z}_1\wedge\ldots\wedge dz_n\wedge d\bar{z}_n$$

Nếu $\omega \in \mathbb{C}_{(p,p)}$ có thể biểu diễn $\omega = \frac{i}{2}\omega_1\wedge\bar{\omega}_1\wedge\frac{i}{2}\omega_2\wedge\bar{\omega}_2\wedge\ldots\wedge\frac{i}{2}\omega_p\wedge\bar{\omega}_p$ với $\omega_j \in \mathbb{C}_{(1,0)}$ thì ω gọi là dạng dương sơ cấp.

Mệnh đề 1.1.3. *Không gian các dạng song bậc (p,p) được sinh ra bởi các dạng dương sơ cấp.*

Chứng minh. Giả sử $\omega \in \mathbb{C}_{(p,p)}$. Khi đó có thể viết:

$$\omega = \sum_{|J|=p,|K|=p}\omega_{J,K}\left(\frac{i}{2}\right)^p dz_{j_1}\wedge d\bar{z}_{k_1}\wedge\ldots\wedge dz_{j_p}\wedge d\bar{z}_{k_p}$$

Vậy chỉ cần biểu diễn $dz_j\wedge d\bar{z}_k$ là tổ hợp tuyến tính của các dạng dương sơ cấp. Thật vậy,

$$dz_j\wedge d\bar{z}_k = \frac{1}{4}\sum_{s=1}^{4} i^s(dz_j + i^s dz_k)\wedge\overline{(dz_j + i^s dz_k)}. \qquad \square$$

Giả sử $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ là tập mở. Tập các dạng vi phân song bậc (p,q) với hệ số thuộc $C_0^\infty(\Omega,\mathbb{C})$ (tương ứng $C_0(\Omega,\mathbb{C})$) được kí hiệu $\mathcal{D}^{(p,q)}(\Omega)$ (tương ứng $\mathcal{D}_0^{(p,q)}(\Omega)$).

Định nghĩa 1.1.4. *Mỗi phần tử $T \in (\mathcal{D}^{(n-p,n-p)}(\Omega))'$ gọi là một dòng song bậc (p,q) hay $(p,q)-$ dòng (tương ứng song chiều $(n-p,n-q)$). Những* *phần tử của* $(\mathcal{D}_0^{(n-p,n-q)}(\Omega))'$ *gọi là dòng cấp* 0*, song bậc* (p,q) *(hay* (p,q)- *dòng cấp* 0*).*

Định nghĩa 1.1.5. *Giả sử* T *là* (p,p)- *dòng trên tập mở* $\Omega\subset\mathbb{C}^n$. T *được gọi là dương nếu với mỗi dạng sơ cấp*

$$\alpha=\frac{i}{2}\alpha_1\wedge\bar{\alpha}_1\wedge\frac{i}{2}\alpha_2\wedge\bar{\alpha}_2\wedge\ldots\wedge\frac{i}{2}\alpha_{n-p}\wedge\bar{\alpha}_{n-p}\in C_{(n-p,n-p)}$$

ta có $T\wedge\alpha$ *là phân bố dương, nghĩa là một độ đo Borel trên* Ω.

1.2. Hàm điều hòa dưới

Định nghĩa 1.2.1. *Giả sử* X *là không gian tôpô. Hàm* $u:X\to[-\infty,+\infty)$ *gọi là nửa liên tục trên trên* X *nếu với mỗi* $a\in\mathbb{R}$ *tập*

$$X_a=\{x\in X:u(x)<a\}$$

là mở trong X. *Hàm* $v:X\to(-\infty,+\infty]$ *gọi là nửa liên tục dưới trên* X *nếu* $-v$ *là nửa liên tục trên* X.

Định nghĩa trên tương đương với định nghĩa mang tính địa phương sau: Giả sử $u:X\to[-\infty,+\infty)$. Ta nói hàm u là nửa liên tục trên tại $x\in X$ nếu $\forall\varepsilon>0$ tồn tại lân cận U_{x_0} của x_0 trong X sao cho $\forall e\in U_{x_0}$ ta có:

$$u(x)<u(x_0)+\varepsilon \text{ nếu } u(x_0)\neq-\infty$$

$$u(x)<-\frac{1}{\varepsilon} \text{ nếu } u(x_0)=-\infty.$$

Giả sử $E\subset X$ và $u:E\to[-\infty,+\infty)$ là hàm trên E. Giả sử $x_0\in\bar{E}$. Ta định nghĩa

$$\limsup_{\substack{x\to x_0\\ x\in E}}u(x)=\inf\left\{\sup\{u(y):y\in V\}\right\}$$

ở đó inf lấy trên các V chạy qua các lân cận của x_0. Khi đó có thể thấy rằng hàm $u:X\to[-\infty,+\infty)$ là nửa liên tục trên tại $x_0\in X$ nếu $\limsup\limits_{x\to x_0}u(x)\le u(x_0)$. Ta có kết quả sau.