

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THỊ HẠNH

**ÁNH XẠ CHỈNH HÌNH  
GIỮA CÁC SIÊU MẶT GIẢI TÍCH THỰC**

**LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC**

**THÁI NGUYÊN - 2016**

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THỊ HẠNH

**ÁNH XẠ CHỈNH HÌNH  
GIỮA CÁC SIÊU MẶT GIẢI TÍCH THỰC**

Chuyên ngành: Toán giải tích

Mã số: 60.46.01.02

**LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC**

Người hướng dẫn khoa học  
**TS. NGUYỄN THỊ TUYẾT MAI**

**THÁI NGUYÊN - 2016**

## **LỜI CAM ĐOAN**

Tôi xin cam đoan rằng các kết quả trình bày trong luận văn này là trung thực và không trùng lặp với các đề tài đã công bố. Tôi cũng xin cam đoan rằng các tài liệu trích dẫn trong luận văn đã được chỉ rõ nguồn gốc.

*Thái nguyên, tháng 04 năm 2016*

**Học viên**

***Nguyễn Thị Hạnh***

# MỤC LỤC

Trang

|                                                              |           |
|--------------------------------------------------------------|-----------|
| Trang bìa phụ                                                |           |
| Lời cam đoan .....                                           | i         |
| Mục lục .....                                                | ii        |
| <b>LỜI MỞ ĐẦU .....</b>                                      | <b>1</b>  |
| <b>Chương 1. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ .....</b>                    | <b>4</b>  |
| 1.1. Ánh xạ chỉnh hình.....                                  | 4         |
| 1.2. Đa tạp phức.....                                        | 5         |
| 1.3. Hàm đa điều hòa dưới.....                               | 10        |
| 1.4. Miền giả lồi .....                                      | 11        |
| 1.5. Miền chỉnh hình và miền lồi chỉnh hình.....             | 12        |
| 1.6. Thác triển giải tích.....                               | 16        |
| <b>Chương 2. ÁNH XẠ CHỈNH HÌNH GIỮA CÁC SIÊU MẶT GIẢI</b>    |           |
| <b>TÍCH THỰC .....</b>                                       | <b>19</b> |
| 2.1. Sự thác triển của dây chuyền các ánh xạ chỉnh hình..... | 19        |
| 2.1.1. Một số khái niệm liên quan. ....                      | 19        |
| 2.1.2. Sự tham số hóa của một dây chuyền. ....               | 20        |
| 2.2. Sự thác triển liên tục của $f$ trên $M^*$ . ....        | 25        |
| 2.3. Sự liên tục giải tích của $f$ . ....                    | 31        |
| 2.4. Một vài ứng dụng.....                                   | 40        |
| <b>KẾT LUẬN.....</b>                                         | <b>42</b> |
| <b>TÀI LIỆU THAM KHẢO.....</b>                               | <b>43</b> |

## LỜI MỞ ĐẦU

Thác triển chỉnh hình là một trong những bài toán trung tâm của Giải tích phức. Trên thế giới có nhiều nhà toán học quan tâm tới vấn đề này và trong khoảng 3 thập kỷ qua đã có nhiều kết quả nghiên cứu quan trọng. Cho đến nay việc thác triển ánh xạ chỉnh hình có hai dạng đáng chú ý:

Dạng 1: Thác triển ánh xạ chỉnh hình lên bao chỉnh hình, hay còn gọi là thác triển chỉnh hình kiểu Hartogs.

Dạng 2: Thác triển ánh xạ qua các tập mỏng (tức là các tập có độ đo Lebesgue bằng 0). Thác triển kiểu này được gọi là thác triển chỉnh hình kiểu Riemann.

Một trong những hướng nghiên cứu của thác triển chỉnh hình kiểu Riemann là thác triển của ánh xạ chỉnh hình giữa các siêu mặt.

Thác triển giải tích của một mầm của ánh xạ giữa các siêu mặt thực đã thu hút được nhiều sự chú ý của các nhà toán và Poincaré là người khởi xướng trong trường hợp siêu mặt nguồn và siêu mặt đích có cùng số chiều.

Vào năm 1974, Fefferman [6] đã chứng tỏ rằng nếu  $D, G \subset \mathbb{C}^n$  là các miền giả lồi mạnh có các biên lớp  $\mathbb{C}^\infty$  thì một ánh xạ song chỉnh hình  $f: D \rightarrow G$  có thể thác triển thành một  $\mathbb{C}^\infty$  – đồng cấu vi phân giữa các bao đóng  $\bar{D}$  và  $\bar{G}$ . Với kết quả định lý này tác giả Fefferman đã chứng minh trong [12] rằng  $f$  là liên tục giải tích trong một lân cận của bao đóng  $\bar{D}$  nếu các biên  $\partial D$  và  $\partial G$  là giải tích thực. Do vậy, vấn đề về sự tương đương song chỉnh hình của các miền dẫn đến sự tương đương song chỉnh hình của các biên của chúng. Trong trường hợp các biên  $\partial D$  và  $\partial G$  là các siêu mặt giải tích thực giả lồi mạnh trong  $\mathbb{C}^n$ , bài toán về sự tương đương song chỉnh hình địa phương của các siêu mặt này đã được nghiên cứu trong các công trình nghiên cứu của Poincaré [10] và Cartan [8]. Chern và Moser [11] đã gần như hoàn chỉnh bài toán này. Pinčuk [12], đã

chứng minh sự tương đương song chỉnh hình của các đoạn nhỏ tùy ý của  $\partial D$  và kéo theo sự tương đương toàn cục của  $\partial D$  và  $\partial G$  và do đó kéo theo sự tương đương của các miền  $D, G$ .

Trong luận văn này, chúng tôi trình bày lại các kết quả nghiên cứu của Pinčuk [12] về sự liên tục giải tích của ánh xạ chỉnh hình và sự tương đương song chỉnh hình giữa các siêu mặt giải tích thực trong  $\mathbb{C}^n$  ( $n \geq 1$ ), dẫn tới sự liên hệ với sự song chỉnh hình của các miền giả lồi mạnh.

Nội dung của luận văn được trình bày trong hai chương.

Chương 1: Trình bày những kiến thức cơ sở về ánh xạ chỉnh hình, hàm chỉnh hình, đa tạp phức, tập giải tích, hàm đa điều hòa dưới, nguyên lý thác triển chỉnh hình.

Chương 2: Trình bày lại một cách chi tiết rõ ràng các kết quả nghiên cứu về sự thác triển của ánh xạ chỉnh hình giữa các siêu mặt giải tích thực của Pinčuk [12].

Để hoàn thành luận văn một cách hoàn chỉnh, em luôn nhận được sự hướng dẫn và giúp đỡ nhiệt tình của TS. Nguyễn Thị Tuyết Mai (Đại học sư phạm - ĐH Thái Nguyên). Em xin chân thành bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến cô và xin gửi lời tri ân nhất của em đối với những điều cô đã dành cho em.

Em xin chân thành cảm ơn ban lãnh đạo Phòng Đào Tạo sau Đại học, quý thầy cô giảng dạy lớp Cao học K22B (2014 – 2016) Trường Đại học Sư phạm – Đại học Thái Nguyên đã tạo điều kiện và tận tình truyền đạt những kiến thức quý báu cho em hoàn thành khóa học.

Em xin gửi lời cảm ơn chân thành nhất tới gia đình, bạn bè, những người đã luôn động viên, hỗ trợ và tạo mọi điều kiện cho em trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn.

Mặc dù đã cố gắng rất nhiều nhưng trong luận này không thể tránh khỏi những thiếu sót. Em rất mong có được những ý kiến đóng góp của các thầy cô và các bạn.

Xin trân trọng cảm ơn!

*Thái Nguyên, tháng 4 năm 2016*

**Tác giả luận văn**

***Nguyễn Thị Hạnh***

# Chương 1

## KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

### 1.1. Ánh xạ chỉnh hình.

#### 1.1.1. Hàm chỉnh hình.

**Định nghĩa 1.1.1:** Giả sử  $M$  là tập mở trong  $\mathbb{C}^n$  và  $f: M \rightarrow \mathbb{C}$  là một hàm số, hàm  $f$  được gọi là khả vi phức tại  $x_0 \in M$  nếu tồn tại ánh xạ tuyến tính  $\lambda: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  sao cho

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - \lambda(h)|}{|h|} = 0,$$

trong đó  $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{C}^n$  và  $|h| = (\sum_{i=1}^n |h_i|^2)^{1/2}$ .

Hàm  $f$  được gọi là *chỉnh hình* tại  $x_0 \in X$  nếu  $f$  khả vi phức trong một lân cận nào đó của  $x_0$  và được gọi là *chỉnh hình* trên  $X$  nếu  $f$  chỉnh hình tại mọi điểm thuộc  $X$ .

**Ví dụ:** Giả sử tập  $M \in \mathbb{C}^2$  lập nên hai hình cầu đóng  $\bar{B}_1 = \{|z - (0,1)| \leq \frac{1}{2}\}$  và  $\bar{B}_2 = \{|z + (0,1)| \leq \frac{1}{2}\}$  được nối với nhau bởi đoạn  $L = \{z_1 = 0, z_2 = x_2, |x_2| \leq \frac{1}{2}\}$ . Xác định trên  $M$  hàm

$$f(z) = \begin{cases} z_1, & z \in \bar{B}_1, \\ 0, & z \in L, \\ -z_1, & z \in \bar{B}_2. \end{cases}$$

Rõ ràng nó liên tục trên  $M$ , và với mỗi điểm  $z^0 \in M$  có thể xây dựng lân cận  $U_{z^0}$  và  $f$  thác triển được vào đó như hàm chỉnh hình. Thật vậy, với các điểm của  $\bar{B}_1$  kể cả giao điểm  $(0, \frac{1}{2})$  của  $\bar{B}_1$  và  $L$ , có thể lấy các lân cận như vậy là các hình cầu không giao với  $\bar{B}_2$  và thác triển  $f$  vào đó bằng cách đặt  $f(z) = z_1$ . Với các điểm của  $\bar{B}_2$ , làm tương tự, chỉ khác là đặt  $f(z) = -z_1$ . Cuối cùng, đối với các điểm trong của  $L$ , ta lấy các hình cầu không chứa các đầu mút của đoạn đó, và đặt trong đó  $f = 0$ .



### 1.1.2. Ánh xạ chỉnh hình.

**Định nghĩa 1.1.2:** Một ánh xạ  $f: X \rightarrow \mathbb{C}^m$  có thể viết dưới dạng  $f = (f_1, \dots, f_m)$ , trong đó  $f_i = \pi_i \circ f: X \rightarrow \mathbb{C}, i = 1, \dots, m$  là các hàm tọa độ.

Khi đó  $f$  được gọi là *chỉnh hình* trên  $X$  nếu  $f_i$  chỉnh hình trên  $X$  với mọi  $i = 1, \dots, m$ .

**Định nghĩa 1.1.3:** Ánh xạ  $f: X \rightarrow f(X) \subset \mathbb{C}^n$  được gọi là *song chỉnh hình* nếu  $f$  là song ánh, chỉnh hình và  $f^{-1}$  cũng là ánh xạ chỉnh hình.

#### Định lý 1.1.4:

Cho  $B_1, B_2 \subset \mathbb{C}^n$  là các miền và ánh xạ  $g = (g_1, \dots, g_m): B_1 \rightarrow B_2$ . Khi đó  $g$  là ánh xạ chỉnh hình nếu và chỉ nếu hàm chỉnh hình  $f$  trong  $B_2$ ,  $f \circ g$  là một hàm chỉnh hình trong  $B_1$ .

### 1.1.3. Siêu mặt thực trong $\mathbb{C}^n$ .

Cho  $M$  là tập con trong  $\mathbb{C}^n$ .  $M$  được gọi là siêu mặt thực nếu với mọi  $z \in M$  tồn tại một lân cận  $U$  của  $z$  trong  $\mathbb{C}^n$  và hàm khả vi liên tục  $p$  nhận giá trị thực trong  $U$  sao cho

$$M \cap U = \{z \in U: p(z, \bar{z}) = 0\}, \text{ với } dp(z) \neq 0, \forall z \in U.$$

Hàm  $p$  như trên được gọi là hàm xác định địa phương.

Nếu  $p$  là hàm giải tích thực tron thì  $M$  được gọi là siêu mặt giải tích thực tron.

## 1.2. Đa tạp phức.

### 1.2.1. Định nghĩa và ví dụ.

**Định nghĩa 1.2.1:** Cho  $M$  là không gian tôpô Hausdorff.

+ Cặp  $(V, \varphi)$  được gọi là một bản đồ địa phương của  $M$ , trong đó  $V$  là một tập mở trong  $M$  và  $\varphi: V \rightarrow \mathbb{C}^n$  là một ánh xạ, nếu các điều kiện sau được thỏa mãn:

- i)  $\varphi(V)$  là tập mở trong  $\mathbb{C}^n$ ,
- ii)  $\varphi: V \rightarrow \varphi(V)$  là một đồng phôi.

+ Họ  $A = \{(V_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$  của  $M$  được gọi là một tập bản đồ giải tích (atlas) của  $M$  nếu các điều kiện sau được thỏa mãn

i)  $\{V_i\}_{i \in I}$  là một phủ mở của  $M$ ,

ii) Với mọi  $V_i, V_j$  mà  $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ , ánh xạ  $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(V_i \cap V_j) \rightarrow \varphi_j(V_i \cap V_j)$  là ánh xạ chỉnh hình.

Xét họ các atlas trên  $X$ . Hai atlas  $A_1, A_2$  gọi là tương đương nếu hợp  $A_1 \cup A_2$  của chúng là một atlas trên  $X$ . Dễ thấy sự tương đương giữa các atlas lập thành một quan hệ tương đương. Mỗi lớp tương đương của quan hệ tương đương trên gọi là một cấu trúc khả vi phức trên  $X$ .  $X$  cùng với cấu trúc khả vi phức trên nó được gọi là một đa tạp phức  $n$  chiều.

Ta biết rằng, một lớp tương đương hoàn toàn được xác định bởi một đại diện của nó. Do đó một atlas khả vi hoàn toàn xác định một cấu trúc khả vi.

**Ví dụ 1:** Cho  $D \subset \mathbb{C}^n$  là một miền. Khi đó,  $D$  là một đa tạp phức  $n$  chiều với bản đồ địa phương  $\{(D, Id_D)\}$ .

**Ví dụ 2:** Đa tạp xạ ảnh  $P^n(\mathbb{C})$ .

Xét quan hệ tương đương trên  $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$  được xác định bởi  $x \sim y \leftrightarrow \exists \lambda \neq 0$  để  $y = \lambda x$ . Ta gọi  $P^n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$  với tôpô thương.

Đặt  $V_i = \{x = (x^0, \dots, x^n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}; x^i \neq 0\}$  với  $i = 0, 1, \dots, n$ .

Rõ ràng  $\{V_i\}_{i=0, \dots, n}$  là một phủ mở của của  $P^n(\mathbb{C})$ .

Xét các đồng phôi  $\varphi_i: V_i \rightarrow \mathbb{C}^n$  cho bởi

$$\varphi_i(x) = \left( \frac{x^0}{x^i}, \dots, \frac{\hat{x}^i}{x^i}, \dots, \frac{x^n}{x^i} \right).$$

Ở đó, kí hiệu  $\hat{\phantom{x}}$  có nghĩa là số hạng dưới mũ đó được bỏ đi. Khi đó ánh xạ ngược được cho bởi  $\varphi_i^{-1}(y^0, \dots, y^{n-1}) = [(y^0, \dots, y^{i-1}, 1, y^i, \dots, y^{n-1})]$ .

Giả sử  $(V_i, \varphi_i)$  và  $(V_j, \varphi_j)$  là hai bản đồ địa phương trên  $P^n(\mathbb{C})$  và  $i < j$  thì

$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}: \varphi_i(V_i \cap V_j) \rightarrow \varphi_j(V_i \cap V_j)$  cho bởi công thức