ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THỊ LIÊN

LÍ THUYẾT NEVANLINNA VÀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN P-ADIC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên – 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THỊ LIÊN

LÍ THUYẾT NEVANLINNA VÀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN P-ADIC

Chuyên ngành: GIẢI TÍCH
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
GS.TSKH HÀ HUY KHOÁI

Thái Nguyên – 2016

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan rằng nội dung trình bày trong luận văn này là trung thực, không trùng lặp với các đề tài khác và các thông tin trích dẫn trong luận văn đã được chỉ rõ nguồn gốc.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2016

Người viết luận văn

Nguyễn Thị Liên

Lời cảm ơn

Luận văn được hoàn thành nhờ sự hướng dẫn nhiệt tình của GS.TSKH Hà Huy Khoái. Thầy đã dành nhiều thời gian, công sức chỉ bảo tôi trong quá trình thực hiện đề tài và tạo mọi điều kiện cho tôi hoàn thành luận văn này. Nhân dịp này tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy.

Tôi xin trân trọng cảm ơn ban lãnh đạo trường ĐHSP Thái Nguyên, lãnh đạo khoa Toán, lãnh đạo khoa Sau Đại Học của trường đã tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tôi hoàn thành tốt nhiệm vụ học tập của mình.

Cuối cùng, tôi xin chân thành cảm sở Giáo Dục và Đào Tạo tỉnh Quảng Ninh, Ban giám hiệu trường THPT Lê Chân, đặc biệt là các đồng nghiệp và gia đình đã động viên, tạo điều kiện giúp đỡ tôi về mọi mặt trong suốt quá trình học tập và hoàn thành luận văn.

Trong quá trình viết luận văn cũng như trong việc xử lí văn bản chắc chắn không tránh khỏi những hạn chế và thiếu sót. Rất mong nhận được sự góp ý của các thầy cô, các bạn đồng nghiệp để luận văn được hoàn thiện hơn.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2016

Người viết luận văn

Nguyễn Thị Liên

Mục lục

Lời cam đoan **i**

Lời cảm ơn **ii**

Mục lục **iii**

Mở đầu **1**

1 Cơ sở lí thuyết Nevanlinna **2**

1.1 Lí thuyết Nevanlinna của hàm phân hình p-adic. 2

1.2 Quan hệ số khuyết cho mục tiêu di động. 7

1.3 Xác định duy nhất các hàm phân hình p-adic 9

1.4 Ước lượng cấp tăng của hàm phân hình p-adic 12

2 Phương trình vi phân p-adic **19**

2.1 Phương trình vi phân đại số p-adic. 19

2.2 Định lí Malmquist kiểu (I). 23

2.3 Định lý Malmquist kiểu (II) 27

2.4 Nghiệm chấp nhận được của một số phương trình vi phân . 29

Kết luận chung **36**

Tài liệu tham khảo **37**

MỞ ĐẦU

Gần đây, lí thuyết Nevanlinna p-adic đã trở thành một lĩnh vực Toán học năng động. Chẳng hạn, Khoái [6], Khoái-Quang [7] và Boutabaa [2] đã chứng minh tương tự p-adic của hai "định lí cơ bản" và quan hệ số khuyết của lí thuyết Nevanlinna cổ điển. Hà Huy Khoái, Mai văn Tư và Cherry-Ye đã nghiên cứu lí thuyết Nevanlinna p-adic nhiều biến và chứng minh quan hệ số khuyết của các siêu phẳng trong trường hợp tổng quát. Hu-Yang đã chứng minh tương tự p-adic về quan hệ số khuyết cho mục tiêu di động, định lí cơ bản thứ hai cho đa thức vi phân và tập xác định duy nhất với số phần tử hữu hạn. Cherry-Yang [4] đã mô tả một số tập xác định duy nhất với số phần tử hữu hạn của các hàm nguyên p-adic...

Luận văn này nhằm trình bày một cách ngắn gọn về lí thuyết Nevanlinna và ứng dụng của nó đối với phương trình vi phân p-adic.

Nội dung luận văn gồm 2 chương:

Chương I: Trình bày một số kiến thức cơ bản về lí thuyết Nevanlinna và một số kết quả về quan hệ số khuyết, bài toán xác định tập duy nhất của hàm phân hình p-adic và ước lượng cấp tăng của hàm phân hình p-adic.

Chương II: Giới thiệu định nghĩa, các tính chất và một số kết quả về phương trình vi phân p-adic, bao gồm Định lí Malmquist kiểu (I), Định lí Malmquist kiểu (II) và chỉ ra một số phương trình vi phân đại số p-adic không có nghiệm phân hình siêu việt chấp nhận được.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2016

Chương 1

Cơ sở lí thuyết Nevanlinna

1.1 Lí thuyết Nevanlinna của hàm phân hình p-adic.

Cho p là số nguyên tố, $\mathbb{Q}_p$ là trường các số p-adic và $\mathbb{C}_p$ là bổ sung đầy đủ p-adic của bao đóng đại số của $\mathbb{Q}_p$. Giá trị tuyệt đối $|.|_p$ trong $\mathbb{C}_p$ đã được chuẩn hóa sao cho $|p|_p = p^{-1}$. Ta tiếp tục sử dụng kí hiệu ord_p là định giá cộng tính trên $\mathbb{C}_p$.

Nhắc lại rằng trong những không gian metric đầy đủ mà metric cảm sinh bởi chuẩn không Acsimet, tổng vô hạn hội tụ nếu và chỉ nếu số hạng tổng quát dần đến 0. Khi đó biểu thức có dạng dưới đây:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

xác định đúng đắn khi $|a_n z^n|_p \to 0$.

Định nghĩa *bán kính hội tụ* ρ bởi

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{n\to\infty} \sup |a_n|_p^{\frac{1}{n}}.$$

Khi đó, chuỗi hội tụ nếu $|z|_p < \rho$ và phân kì nếu $|z|_p > \rho$. Ngoài ra, hàm $f(z)$ được gọi là giải tích p-adic trên $B(\rho)$ nếu chuỗi hội tụ trên

$$B(\rho) = \{z \in \mathbb{C}_p | \, |z|_p < \rho\}.$$

Nếu $\rho = \infty$, hàm $f(z)$ được gọi là hàm nguyên p-adic trên $\mathbb{C}_p$.

Cho f là hàm giải tích p-adic khác hằng trên $B(\rho)$ $(0 < \rho \leq \infty)$. Bản chất của phương pháp *Wiman-Valiron* là phân tích dáng điệu của hàm bằng *số hạng cực đại*:

$$\mu(r, f) = \max_{n \geq 0} |a_n|_p \, r^n \quad (0 < r < \rho),$$

cùng với *chỉ số trung tâm*:

$$\nu(r, f) = \max_{n \geq 0} \{n | \, |a_n|_p \, r^n = \mu(r, f)\}.$$

Định nghĩa $\nu(0, f) = \lim_{r \to 0} \nu(r, f)$. Hơn nữa, chúng ta chú ý rằng nếu h là một hàm giải tích p-adic khác trên $B(\rho)$ thì

$$\mu(r, fh) = \mu(r, f) \, \mu(r, h). \tag{1}$$

Bổ đề 1.1.1. *Chỉ số trung tâm $\nu(r, f)$ tăng khi $r \to \rho$ và thỏa mãn công thức:*

$$\log \mu(r, f) = \log \left|a_{\nu(0,f)}\right|_p + \int_0^r \frac{\nu(t, f) - \nu(0, f)}{t} dt + \nu(0, f) \log r \quad (0 < r < \rho).$$

Bổ đề 1.1.2. Định lý chuẩn bị Weierstrass. *Tồn tại duy nhất đa thức P có bậc $\nu(r, f)$ và một hàm giải tích p-adic g trên $B[r]$ sao cho $f = gP$, ở đó:*

$$B[r] = \{z \in \mathbb{C}_p | \, |z|_p \leq r\}.$$

Hơn nữa, g không có bất kì không điểm nào trong $B[r]$, và P có đúng $\nu(r, f)$ không điểm kể cả bội trên $B[r]$.

Gọi $n\left(r, \frac{1}{f}\right)$ là số không điểm (kể cả bội) của f với giá trị tuyệt đối $\leq r$ và định nghĩa *hàm đếm* của f đối với 0 bởi:

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) = \int_0^r \frac{n\left(t, \frac{1}{f}\right) - n\left(0, \frac{1}{f}\right)}{t} dt + n\left(0, \frac{1}{f}\right) logr \quad (0 < r < \rho).$$

Bổ đề 1.1.2 chỉ ra rằng

$$n\left(r,\frac{1}{f}\right)=\nu\left(r,f\right).$$

Từ bổ đề 1.1.1 suy ra *công thức Jensen*:

$$N\left(r,\frac{1}{f}\right)=\log\mu\left(r,f\right)-\log\left|a_{n\left(0,\frac{1}{f}\right)}\right|_p. \tag{2}$$

Chúng ta cũng kí hiệu số các không điểm phân biệt của f trên $B\left[r\right]$ bởi $\overline{n}\left(r,\frac{1}{f}\right)$ và định nghĩa:

$$\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)=\int\limits_0^r\frac{\overline{n}\left(t,\frac{1}{f}\right)-\overline{n}\left(0,\frac{1}{f}\right)}{t}\,dt+\overline{n}\left(0,\frac{1}{f}\right)\log r\quad\left(0<r<\rho\right).$$

Với mỗi n ta vẽ đồ thị $\gamma\left(t\right)$ miêu tả $ord_p\left(a_nz^n\right)$ như hàm của $t=ord_p(z)$. Khi đó $\gamma\left(t\right)$ là đường thẳng với độ nghiêng n. Gọi $\gamma\left(t,f\right)$ là biên của miền giao của tất cả các nửa mặt phẳng nằm dưới các đường thẳng $\gamma_n(t)$. Đường này được gọi là *Đa giác Newton* của hàm $f(z)$. Các điểm t mà tại đó $\gamma\left(t,f\right)$ có các đỉnh được gọi là *điểm tới hạn* của $f(z)$.Đoạn hữu hạn $[\alpha,\beta]$ chỉ chứa hữu hạn các *điểm tới hạn*. Rõ ràng rằng nếu t là *điểm tới hạn* thì $ord_p\left(a_n\right)+nt$ đạt tới giá trị nhỏ nhất tại hai giá trị n. Hiển nhiên, chúng ta có:

$$\mu(r,f)=p^{-\gamma(t,f)}$$

trong đó $r=p^{-t}$. Tính chất cơ bản của đa giác Newton là nếu $t=ord_p(z)$ không là điểm tới hạn thì

$$\left|f(z)\right|_p=p^{-\gamma(t,f)}$$

kéo theo

$$\left|f(z)\right|_p=\mu(r,f).$$

Hàm phân hình f trên $B(\rho)$ được hiểu là thương $\frac{g}{h}$ của hai hàm giải tích p-adic g và h sao cho g và h không có nhân tử chung trong vành các hàm giải tích p-adic trên $B\left[\rho\right]$. Vì hàm μ thỏa mãn (1) và vì UCLN của hai hàm giải tích p-adic tồn tại, ta có thể mở rộng duy nhất μ cho hàm phân hình $f = \frac{g}{h}$ bằng cách định nghĩa

$$\mu(r, f) = \frac{\mu(r, g)}{\mu(r, h)}.$$

Ta cũng đặt

$$\gamma(t, f) = \gamma(t, g) - \gamma(t, h).$$

Rõ ràng rằng, nếu $t = ord_p(z)$ không là điểm tới hạn của $f(z)$, nói một cách khác t không là điểm tới hạn của $g(z)$ hoặc $h(z)$ thì

$$|f(z)|_p = p^{-\gamma(t,f)} = \mu(r, f).$$

Định nghĩa

$$|\mathbb{C}_p| = \{|z|_p \, | z \in \mathbb{C}_p\}.$$

Chú ý rằng $\{p^w | w \in \mathbb{Q}\} \subseteq |\mathbb{C}|_p\}$. $|\mathbb{C}|_p$ trù mật trong $\mathbb{R}[0, +\infty)$.

Nếu $a : \mathbb{R}[0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ và $b : |\mathbb{C}|_p \longrightarrow \mathbb{R}$ là các hàm giá trị thực thì

$$||a(r)|| \leq b(z)$$

nghĩa là với bất kì số dương hữu hạn nào $0 < R < \rho$ có một tập hữu hạn E trong$|\mathbb{C}_p| \cap [0, R]$ sao cho

$$a(r) \leq b(r), \quad r = |z|_p \in |\mathbb{C}_p| \cap [0, R] - E.$$

Bằng cách sử dụng kí hiệu này, ta có

$$||\mu(r, f)|| = |f(z)|_p$$

cho hàm phân hình p-adic f trên $B(\rho)$.

Định nghĩa *hàm đếm* $n(r, f)$ và $N(r, f)$ của f đối với cực điểm bởi

$$n(r, f) = n(r, \frac{1}{h}), \quad N(r, f) = N(r, \frac{1}{h}).$$

Sau đó áp dụng (2) cho g và h, ta thu được *công thức Jensen*:

$$N(r, \frac{1}{f}) - N(r, f) = \log \mu(r, f) - C_f, \tag{3}$$